



**UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES**

Fachrichtung Physik

Mathematische Methoden der Physik

WS 2015/16

Prof. Dr. Ludger Santen

Version 11. Februar 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Elemente der linearen Algebra	3
1.1	Vektorräume	3
1.1.1	Lineare Gleichungen	3
1.1.2	Vektorräume: Definitionen und Beispiele	4
1.1.3	Linearkombinationen, lineare Hülle und Erzeugendensysteme	6
1.1.4	Vektorräume und Basis	7
1.1.5	Lösen linearer Gleichungssysteme	8
1.2	Matrizen	11
1.2.1	Rechenoperationen mit Matrizen	11
1.2.2	Matrixinversion	13
1.2.3	Matrizen: Definitionen und Eigenschaften	14
1.2.4	Das Eigenwertproblem	16
1.2.5	Entartete Eigenwerte	17
1.2.6	Eigenvektoren und Eigenwerte einer normalen Matrix	18
1.2.7	Basiswechsel und Ähnlichkeitstransformationen	19
1.2.8	Diagonalisierung von Matrizen	21
2	Differentialrechnung	23
2.1	Die lineare Näherung einer Funktion	23
2.1.1	Die Ableitung der Umkehrfunktion	24
2.1.2	Die Produktregel	25
2.2	Differentialrechnung im \mathbb{R}^n	25
2.2.1	Funktionen mehrerer Variablen	25
2.2.2	Das totale Differential und die totale Ableitung	26
2.2.3	Exakte und inexacte Differentiale	29
2.2.4	Implizite Differentiation	30
2.2.5	Extremwerte	32
2.3	Stationäre Punkte von Funktionen mit mehreren Variablen	35
2.4	Extrema mit Nebenbedingungen	36
2.4.1	Taylor-Entwicklungen	40
3	Reihen und Folgen	43
3.1	Berechnung von Reihen	43
3.1.1	Die vollständige Induktion	43
3.2	Unendliche Reihen	45
3.2.1	Konvergenz und Divergenz von Reihen	45

3.2.2	Konvergenzkriterien für Reihen	46
3.2.3	Leibnizkriterium für alternierende Reihen	48
3.2.4	Potenzreihen	49
3.3	Berechnung von Reihensummen	51
3.3.1	Direkte Methoden	51
3.3.2	Die Methode der Differenzen	52
3.4	Integralrechnung	53
4	Das Lebesgue-Integral	59
4.0.1	Höhere Dimensionen	59
4.0.2	Messbarkeit einer Funktion $f(x)$	60
4.0.3	Integrationstechnik: Die Integration rationaler Funktionen	62
4.0.4	Uneigentliche Integrale	64
4.0.5	Differentiation von Integralen	65
4.1	Mehrdimensionale Integrale	67
4.1.1	Variablentransformation	70
5	Vektoranalysis	75
5.1	Der Gradient	75
5.2	Raumkurven und Kurvenintegrale	76
5.2.1	Länge und Bogenlänge	76
5.2.2	Skalare Kurvenintegrale	77
5.2.3	Vektorielle Kurvenintegrale	78
5.2.4	Konservative Vektorfelder und Potential	79
5.2.5	Weitere Vektoroperatoren	80
5.3	Oberflächenintegrale	81
5.3.1	Charakterisierung von Flächenstücken im \mathbb{R}^3	81
5.3.2	Das vektorielle Oberflächenintegral	85
5.4	Integralsätze der Vektoranalysis	87
5.4.1	Der Integralsatz von Green	87
5.4.2	Der Integralsatz von Gauß	90
5.4.3	Der Integralsatz von Stokes	91
5.5	Basissysteme krummliniger Koordinaten	92
6	Gewöhnliche Differentialgleichungen	97
6.1	Gewöhnliche DGL erster Ordnung	97
6.1.1	Lineare Differentialgleichungen	97
6.1.2	Nichtlineare DGL	101
6.1.3	Die Bernoulli-Gleichung	102
6.2	Gewöhnliche DGL höherer Ordnung	103
6.2.1	Konstante Koeffizienten	103
6.3	Green-Funktionen	108

Dieses Manuskript entspricht den Notizen zur Vorlesung Mathematische Methoden der Physik im WS 2015/16 an der Universität des Saarlandes.

Es kann und soll den Besuch der Vorlesung nicht ersetzen, sondern als Unterstützung dienen.

Das Skript wird regelmäßig redigiert und aktualisiert. Sollten Sie dennoch Errata vorfinden, schreiben Sie bitte eine E-Mail an alki@lusi.uni-sb.de mit der Versionsnummer des Skripts (siehe Deckblatt) sowie der Seitenzahl und der entsprechenden Textpassage.

Kapitel 1

Elemente der linearen Algebra

1.1 Vektorräume

In der Schule und im Vorkurs sind Ihnen einige wichtige Eigenschaften von Vektoren vorgestellt worden. Wir betrachten an dieser Stelle den Zusammenhang zwischen linearen Gleichungssystemen, Vektorräumen und Matrizen.

1.1.1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind von der Form

$$L(\mathbf{u}) = \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

mit den Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{u} . Beispiele solcher Systeme gibt es häufig in der Physik:

(i) Schwingungsgleichung:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(t) + a \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) + b \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) \quad (1.2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b \right) \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) \quad (1.3)$$

(ii) Potentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x, y) + \frac{d^2}{dy^2} u(x, y) = v(x, y) \quad (1.4)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) u(x, y) = v(x, y) \quad (1.5)$$

(iii) Vertrauter dürfte Ihnen die Form

$$2x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \quad (1.6)$$

$$-7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = y_2 \quad (1.7)$$

sein, mit

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad L(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ -7x_1 - 5x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Diese Probleme haben gemeinsam, dass für die Abbildung

$$L : \mathbf{u} \mapsto L(\mathbf{u}) \quad (1.9)$$

gilt:

$$L(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 L(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{u}_2). \quad (1.10)$$

Dies sind die definierenden Eigenschaften von linearen Abbildungen. Einige Eigenschaften von linearen Abbildungen sind direkt offensichtlich:

- (i) Die homogene Gleichung $L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ besitzt immer die triviale Lösung $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- (ii) Sind \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 Lösungen der homogenen Gleichung, so ist auch jede Linearkombination $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2$ eine Lösung. Die Lösungen bilden einen Vektorraum.
- (iii) Ist \mathbf{u}_0 eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $L(\mathbf{u}) = \mathbf{a}$, so erhält man sämtliche Lösungen durch $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_0$, wobei \mathbf{u}_h sämtliche Lösungen der homogenen Gleichung durchläuft.

Mit der Einführung von linearen Abbildungen sind offenbar einige Begriffe verbunden, die wir näher diskutieren wollen. Außerdem werden wir uns mit der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen beschäftigen.

1.1.2 Vektorräume: Definitionen und Beispiele

Definition: *Vektorraum*

Eine nichtleere Menge \mathcal{V} heißt Vektorraum über \mathbb{R} bzw. über \mathbb{C} , wenn auf \mathcal{V} eine Addition sowie eine Multiplikation mit Zahlen aus \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} erklärt ist, sodass die Rechenregeln der Vektorräume gelten. Im Einzelnen wird ein Vektorraum durch folgende Eigenschaften bestimmt:

Wenn $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ gilt, dann ist auch $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Ferner enthält \mathcal{V} ein ausgezeichnetes Element $\mathbf{0}$. Es gelten dann die folgenden Regeln:

$$(V_1) \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

$$(V_2) \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u},$$

$$(V_3) \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}.$$

(V₄) Die Gleichung $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$ besitzt stets genau eine Lösung \mathbf{x} . Mit $\mathbf{u} \in \mathcal{V}, \alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$) gehört auch $\alpha \cdot \mathbf{u}$ zu \mathcal{V} und es gilt:

$$(S_1) (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u},$$

$$(S_2) \alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v},$$

$$(S_3) \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{u},$$

$$(S_4) 1\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

Die Elemente von \mathcal{V} nennen wir Vektoren. Die Elemente des zugrundeliegenden Zahlkörpers \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} Skalare (z.B. α, β). Das neutrale Element der Addition, $\mathbf{0}$, nennen wir Nullvektor.

Beispiele:

- \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n sind Vektorräume über \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} . Dies gilt auch für $n = 1$, wobei dann der Unterschied zwischen Vektoren und Skalaren nicht mehr besteht.
- Funktionenräume:
 \mathcal{M} ist eine nichtleere Menge, \mathbb{K} einer der Zahlkörper \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} . Dann ist

$$\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C}) = \{f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{K}\} \quad \text{mit} \quad (1.11)$$

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x) \quad (1.12)$$

$$\alpha \cdot f : x \mapsto \alpha \cdot f(x) \quad (1.13)$$

ein Vektorraum über \mathbb{K} .

Definition: Teilräume

Ist \mathcal{V} ein Vektorraum über \mathbb{K} , so nennen wir \mathcal{U} einen Unterraum bzw. Teilraum, wenn mit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ auch jede Linearkombination $\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}$ zu \mathcal{U} gehört, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Weiterhin setzen wir voraus, dass \mathcal{U} eine nichtleere Teilmenge von \mathcal{V} ist.

Beispiele:

- $\{\mathbf{0}\}$ ist immer Teilraum von \mathcal{V} , genauso wie \mathcal{V} selbst.
- Die Lösungen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0 \quad (1.14)$$

bilden einen Teilraum des \mathbb{R}^n .

Übungsaufgabe: Gilt dies auch für $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = t$, mit $t \neq 0$?

1.1.3 Linearkombinationen, lineare Hülle und Erzeugendensysteme

Definition: *Linearkombination*

Jeder Vektor der Form

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k, \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad (1.15)$$

heißt Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$.

Definition: *Aufspann*

Die Menge aller Linearkombinationen aus $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ heißt ihr Aufspann bzw. ihre lineare Hülle (LH),

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}. \quad (1.16)$$

Der Aufspann ist ein Teilraum von \mathcal{V} .

Definition: *Lineare (Un-) Abhängigkeit*

Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ eines \mathbb{K} -Vektorraums \mathcal{V} heißen linear abhängig (l.a.), falls es Skalare $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}$ gibt, die alle nicht Null sind, sodass

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = 0. \quad (1.17)$$

Andernfalls heißen sie linear unabhängig (l.u.).

Beispiele:

(i) Die Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

sind linear unabhängig.

(ii) Sind die Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

des \mathbb{R}^4 linear unabhängig? Wir müssen dazu offenbar die Gleichung

$$x_1 \mathbf{u} + x_2 \mathbf{v} + x_3 \mathbf{w} = 0 \quad (1.20)$$

lösen, bzw. in Komponenten

$$x_1 + 3x_3 = 0 \quad (1.21)$$

$$-x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \quad (1.22)$$

$$-2x_2 + 2x_3 = 0. \quad (1.23)$$

Folglich gilt

$$x_2 - x_3 = 0 \quad (1.24)$$

$$-x_1 - 3x_3 = 0. \quad (1.25)$$

Offenbar ist $x_1 = 3$ und $x_2 = x_3 = -1$ Lösung des homogenen Gleichungssystems. Die Vektoren sind also linear abhängig.

1.1.4 Vektorräume und Basis

Definition: *Basis*

Ein geordnetes n -Tupel $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ von Vektoren des \mathbb{K} -Vektorraums \mathcal{V} heißt eine Basis von \mathcal{V} , wenn sich jeder Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ als Linearkombination

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \quad (1.26)$$

in eindeutiger Weise darstellen lässt. Die durch \mathbf{v} eindeutig bestimmten Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ heißen die Koordinaten von \mathbf{v} bezüglich der Basis \mathcal{B} . Sie werden zu einem Koordinatenvektor

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

zusammengefasst.

Satz:

$$\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \quad (1.28)$$

ist genau dann eine Basis, wenn $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

Bemerkung: Es sei $U = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ein Teilraum von \mathcal{V} , dann ist $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ein Erzeugendensystem von U .

Beweis:

- (i) Es sei $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis. Nach Definition gilt $\mathcal{V} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Jeder Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ muss sich mit eindeutig bestimmten Koeffizienten aus

den $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bestimmen lassen. Dies gilt auch für den Nullvektor. Damit folgt aus

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n = 0, \quad (1.29)$$

und somit die lineare Unabhängigkeit.

(ii) Es seien $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n$ zwei Darstellungen von \mathbf{v} . Mit

$$(\alpha_1 - \beta_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (1.30)$$

folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$: $\alpha_i = \beta_i \quad \forall i$, also die Eindeutigkeit.

Satz: *Dimension eines Vektorraums*

Besitzt ein Vektorraum \mathcal{V} eine Basis aus n Vektoren, so besteht auch jede andere Basis aus n Vektoren. n ist gleichzeitig die Dimension des Vektorraums \mathcal{V} . Also

$$\dim(\mathcal{V}) = n. \quad (1.31)$$

Bemerkung: Für $\mathcal{V} = \{0\}$ gilt $\dim(\mathcal{V}) = 0$, besitzt der Vektorraum \mathcal{V} keine endliche Basis, so bezeichnen wir ihn als unendlichdimensional.

Basisergänzungssatz: Ist $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ ein Erzeugendensystem von \mathcal{V} und sind $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ linear unabhängige Vektoren in \mathcal{V} , die keine Basis von \mathcal{V} bilden, so lassen sich die $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ durch Hinzufügen geeigneter \mathbf{b}_k zu einer Basis von \mathcal{V} ergänzen.

Basisauswahlsatz: Besitzt der Vektorraum $\mathcal{V} \neq \{0\}$ ein endliches Erzeugendensystem $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, so lässt sich aus diesem eine Basis für \mathcal{V} auswählen.

1.1.5 Lösen linearer Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen für n Unbekannte hat die Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1.32)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \quad (1.33)$$

Gegeben sind in diesem Problem die Koeffizienten $a_{ik} \in \mathbb{K}$ und die Zahlen $b_k \in \mathbb{K}$. Gesucht sind alle Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{K}$, die die obigen Gleichungen erfüllen.

Rangbedingung zur Lösbarkeit: Lineare Gleichungssysteme in der obigen Form können kompakt durch $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geschrieben werden, mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{sowie } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n. \quad (1.34)$$

Der Rang einer Matrix bestimmt sich aus:

- (i) der Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (Zeilenrang),
- (i) der Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren (Spaltenrang),
- (iii) der Dimension des Bildraums der linearen Abbildung $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}, \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Beispiel: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

hat den Rang $\text{rang}(A) = 2$, da die ersten beiden Vektoren linear unabhängig sind und die dritte Zeile die Summe der ersten beiden ist.

Rangbedingung: Hat \mathcal{V} die Dimension n , \mathcal{W} die Dimension m , so ist die lineare Abbildung $L : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ genau dann *injektiv* (eindeutig), wenn $\text{rang}(L) = n$ und genau dann *surjektiv*, wenn $\text{rang}(L) = m$.

Bemerkung: Für eine injektive Abbildung gilt, dass jedem Bild höchstens ein Urbild zuzuordnen ist, d.h. es gilt die Implikation

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2, \quad (1.36)$$

sowie

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2) \quad (1.37)$$

folgt. Für eine surjektive Abbildung $f : M \rightarrow N$ gilt, dass N die Bildmenge von f ergibt, d.h. dass für jedes $y \in N$ die Gleichung $f(x) = y$ mindestens eine Lösung aus M existiert.

Das LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist also eindeutig lösbar, wenn $\text{rang}(A) = n$ und universell lösbar, wenn $\text{rang}(A) = m$ ist.

Eliminationsverfahren: Gesucht sind alle Lösungen des LGS

$$4x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 16 \quad (1.38)$$

$$-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -2 \quad (1.39)$$

$$2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 14 \quad (1.40)$$

$$4x_1 - x_2 - 9x_3 - 2x_4 - x_5 = -5 \quad (1.41)$$

1. Schritt: Umstellung der Gleichungen (nur noch Koeffizienten), Vertauschung der Zeilen I und II.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -3 & 3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 & -5 \end{array} \right) \quad (1.42)$$

2. Schritt: Normierung der Kopfzeile

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 & -5 \end{array} \right) \quad (1.43)$$

3. Schritt: Elimination von x_1 aus Zeile IV durch Multiplikation der Kopfzeile mit (-4) und Addition zur 4. Zeile

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array} \right) \quad (1.44)$$

4. Schritt: Normierung der Kopfzeile im Restsystem

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{37}{3} & \frac{37}{3} \end{array} \right) \quad (1.45)$$

5. Schritt: Elimination von x_2 aus den letzten beiden Gleichungen mittels $(-2) \cdot I$ bzw. $5 \cdot I$ führt auf

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} & \frac{37}{3} \end{array} \right) . \quad (1.46)$$

6. Schritt: Die Koeffizienten von x_3 verschwinden. Das obige Schema führt dann auf das Restsystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array} \right) \quad (1.47)$$

und schließlich nach Normierung der Kopfzeile und Elimination von x_4 sowie x_5 in der unteren Zeile

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (1.48)$$

7. Schritt: Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (1.49)$$

bzw.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5 &= \frac{2}{3} \\ x_2 + x_3 + \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{2}x_5 &= 4 \\ x_4 - 2x_5 &= 4 \end{aligned}$$

8. Schritt: Auflösen der Gleichung in Zeilenstufenform. Mit der Festlegung $s := x_3$ und $t := x_5$ ergibt sich als Lösungsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

1.2 Matrizen

1.2.1 Rechenoperationen mit Matrizen

(i) Matrizen werden elementweise addiert, die Addition ist (daher) kommutativ und assoziativ, d.h.

$$A + B = B + A, \quad (1.51)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C. \quad (1.52)$$

- (ii) Multipliziert man eine Matrix mit einer Konstanten, so werden alle Elemente mit dieser Konstanten multipliziert.

$$B = \alpha A \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = \alpha a_{ij}. \quad (1.53)$$

- (iii) Die Multiplikation von Matrizen erfolgt nach der Regel „Zeile mal Spalte“:

$$AB = C \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}. \quad (1.54)$$

Aus der Rechenregel ergibt sich sofort, dass die Zahl der Spalten von A der Zahl der Zeilen von B entsprechen muss.

- (iv) Für die Matrixmultiplikation gilt das Distributivgesetz, aber nicht das Kommutativgesetz. So gilt beispielsweise

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.55)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

$$\neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = BA. \quad (1.57)$$

Die Matrixmultiplikation ist also nicht kommutativ!

Bemerkung: Die obigen Matrizen sind zwei der drei sogenannten *Paulimatrizen*, die die Komponenten des quantenmechanischen Spinoperators bilden.

Definition: Der Kommutator $[A, B] := AB - BA$ misst die Differenz zwischen beiden Produkten aus A und B .

Spezielle Matrizen:

- (i) Nullmatrix: $A = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0$.

- (ii) Einheitsmatrix: $A = \mathbb{1} \Leftrightarrow a_{ij} = \delta_{ij}$, mit dem sogenannten Kroneckersymbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \neq j, \\ 1, & \text{wenn } i = j. \end{cases} \quad (1.58)$$

Es gelten offenbar die Relationen $A0 = 0A = 0$ sowie $A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A$.

Bemerkung: Bei Matrizen treten einige Eigenschaften auf, die man von der Multiplikation von gewöhnlichen Skalaren nicht kennt. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 22 & 44 \\ -11 & -22 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

Das Produkt der Matrizen ergibt die Nullmatrix, obwohl keine der beiden Matrizen Null ist. Damit kann also auch $AC = AD$ gelten, obwohl $C \neq D$.

1.2.2 Matrixinversion

Für quadratische Matrizen A kann man eine Matrix A^{-1} suchen, sodass $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$. Die inverse Matrix lautet:

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det(A)} C_{ji}, \quad \text{mit der Kofaktormatrix } C_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (1.61)$$

und dem Minor M_{ij} , d.h. die Determinante der Streichmatrix. Offenbar ist die Matrix nur dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$. Da $\det(AA^{-1}) = \det(\mathbb{1}) = 1$ gilt, erhalten wir

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \quad (1.62)$$

Ferner gilt: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, wegen $(AB)^{-1}(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = \mathbb{1}$.

Beispiel: Bestimmung der Inversen der Matrix A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Die Kofaktoren ergeben sich zu

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -4 + 6 = 2 = C_{11}, \quad (1.64)$$

$$M_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 6 = -4 = -C_{12}. \quad (1.65)$$

Insgesamt erhalten wir:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 13 & -18 \\ -2 & 7 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det(A) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) = 11 \quad (1.66)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{C^T}{\det(A)} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 13 & 7 \\ -3 & -18 & -8 \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

Bemerkung: Ist die Koeffizientenmatrix eines LGS invertierbar, so kann man die Lösung des Gleichungssystems einfach durch Matrixinversion bestimmen:

$$Ax = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}. \quad (1.68)$$

1.2.3 Matrizen: Definitionen und Eigenschaften

Spur einer Matrix: Die Spur einer Matrix, $\text{Sp}(A)$ bzw. $\text{tr}(A)$, ist die Summe ihrer Diagonalelemente,

$$\text{tr}(A) = \sum_i (A)_{ii} = \sum_i a_{ii}. \quad (1.69)$$

Es gilt:

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i,k} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i,k} b_{ki}a_{ik} = \text{tr}(BA). \quad (1.70)$$

Allgemeiner gilt: Die Spur ist invariant unter zyklischer Vertauschung von Matrixprodukten, also

$$\text{tr}(A_1A_2 \dots A_n) = \text{tr}(A_nA_1 \dots A_{n-1}). \quad (1.71)$$

Transponierte Matrix:

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}. \quad \text{Es gilt: } (AB)^T = B^T A^T. \quad (1.72)$$

Komplex konjugierte Matrix:

A^* bzw. \bar{A} , die die Elemente a_{ij}^* enthält.

Hermesch konjugierte Matrix (bzw. adjungierte Matrix):

$$A^\dagger = (A^T)^*. \quad (1.73)$$

Diagonalmatrix:

Nur die Diagonalelemente sind von Null verschieden.

Symmetrische Matrix:

$$A = A^T. \quad (1.74)$$

Antisymmetrische Matrix:

$$A = (-1)A^T. \quad (1.75)$$

Reelle Matrix:

$$A = A^*. \quad (1.76)$$

Imaginäre Matrix:

$$A = -A^*. \quad (1.77)$$

Orthogonale Matrix:

$$A^{-1} = A^T, \text{ für quadratische Matrizen, z.B. Drehmatrizen.} \quad (1.78)$$

Hermiteische Matrix:

$$A = A^\dagger. \quad (1.79)$$

Antihermitesche Matrix:

$$A = -A^\dagger. \quad (1.80)$$

Unitäre Matrix:

$$A^{-1} = A^\dagger. \quad (1.81)$$

Nilpotente Matrix:

$$A^n = 0, \quad \text{für ein } n > n_0. \quad (1.82)$$

Singuläre Matrix:

Matrix, deren Determinante verschwindet (nicht invertierbar).

1.2.4 Das Eigenwertproblem

Die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix ist im Allgemeinen eine Drehstreckung, d.h. Richtung und Betrag des Vektors werden geändert. Liegt der Vektor aber parallel zur Drehachse, wird nicht seine Richtung, sondern ausschließlich sein Betrag (seine Norm) geändert. Also gilt für einen solchen Vektor \mathbf{v} :

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (1.83)$$

Vektoren \mathbf{v} , die Gleichung (1.83) erfüllen, nennt man *Eigenvektoren* der Matrix A und den Skalierungsfaktor λ den dazugehörigen *Eigenwert*. Zur Bestimmung von λ und \mathbf{v} betrachtet man die homogene Gleichung

$$(A - \lambda\mathbf{1})\mathbf{v} = 0, \quad (1.84)$$

die direkt aus (1.83) folgt. Eine nichtlineare Lösung dieses homogenen Gleichungssystems kann offenbar nur dann erfolgen, wenn $\det(A - \lambda\mathbf{1})$ verschwindet. Die Bedingung

$$\det(A - \lambda\mathbf{1}) = 0 \quad (1.85)$$

führt für eine $n \times n$ -Matrix auf ein Polynom n -ten Grades in λ , das über dem Körper \mathbb{C} n (nicht notwendigerweise verschiedene) Lösungen besitzt. Diese Lösungen sind die Eigenwerte des Problems. Das Polynom, das sich aus der Eigenwertgleichung bzw. Säkulargleichung ergibt, wird *charakteristisches Polynom* genannt.

Beispiel: Bestimmung der Eigenwerte der Matrix A , mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}. \quad (1.86)$$

Die Säkulargleichung zur obigen Matrix lautet

$$\det(A - \lambda\mathbf{1}) = \det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & -3 \\ 1 & 1 - \lambda & -3 \\ 3 & -3 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.87)$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda)[(1 - \lambda)(-3 - \lambda) - 9] - (-3 - \lambda + 9) + 3[-3 - 3(1 - \lambda)] = 0 \quad (1.88)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 6) = 0. \quad (1.89)$$

Die Eigenwerte lauten demnach $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -6$. Es bleibt also noch die Aufgabe, die Eigenvektoren zu bestimmen. Dazu setzt man die Eigenwerte ein und löst das zugehörige homogene Gleichungssystem. Wir wollen dies am Beispiel

von oben explizit ausführen. Für den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right] \cdot 3 \\ \left[\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right] + \\ \left[\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right] + \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad (1.90)$$

Wir erhalten aus dem obigen LGS $x_3 = 0$, woraus wiederum $x_1 = x_3 =: t$ folgt. Der zugehörige Eigenvektor lautet also

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.91)$$

Es ist nützlich, mit normierten Eigenvektoren zu arbeiten, so dass

$$\|\mathbf{x}_1\| = 2t^2 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.92)$$

Damit lautet der normierte Eigenvektor

$$\mathbf{x}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.93)$$

Analog ergibt sich für die übrigen Eigenvektoren

$$\mathbf{x}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (1.94)$$

Bemerkung: Die Menge der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix nennt man auch das *Eigensystem*. Die Eigenwerte von A und A^\top stimmen überein, die zugehörigen Eigenvektoren nicht zwangsläufig. Dies bedeutet, dass linke und rechte Eigenvektoren nicht übereinstimmen müssen.

1.2.5 Entartete Eigenwerte

Wir wenden uns wiederum einem Beispiel zu. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda \mathbf{1}) = -\lambda(-2 - \lambda) + 1 = (1 + \lambda)^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.96)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1. \quad (1.97)$$

Der einzige Eigenvektor zu dieser Matrix ist

$$\mathbf{x}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.98)$$

Die 2×2 -Matrix A ist ein Beispiel für eine nicht-hermitesche Matrix, bei der das Eigensystem eine niedrigere Dimension hat als die Matrix. Die *geometrische Multiplizität*, d.h. die Zahl der Eigenvektoren zu einem Eigenwert ist also in diesem Fall geringer als die *algebraische Multiplizität*.

1.2.6 Eigenvektoren und Eigenwerte einer normalen Matrix

Wir wollen nun die Eigenschaften verschiedener Matrizen mit den Eigenschaften von Eigenvektoren und Eigenwerten in Verbindung bringen. Dazu betrachten wir zunächst normale Matrizen, d.h. Matrizen, für die gilt

$$AA^\dagger = A^\dagger A. \quad (1.99)$$

Bemerkung: Unitäre und hermitesche Matrizen sind gleichzeitig normale Matrizen (bzw. orthogonale und symmetrische Matrizen im Falle reeller Matrizen).

Es sei nun \mathbf{x} Eigenvektor zum Eigenwert λ , also gilt

$$(A - \lambda \mathbf{1})\mathbf{x} = 0. \quad (1.100)$$

Mit $B = A - \lambda \mathbf{1}$ gilt dann $B\mathbf{x} = 0 = \mathbf{x}^\dagger B^\dagger$, also insgesamt

$$\mathbf{x}^\dagger B^\dagger B \mathbf{x} = 0. \quad (1.101)$$

Explizit ergibt sich

$$B^\dagger B = (A - \lambda \mathbf{1})^\dagger (A - \lambda \mathbf{1}) = (A^\dagger - \lambda^* \mathbf{1})(A - \lambda \mathbf{1}) = AA^\dagger - \lambda^* A - \lambda A^\dagger + \lambda \lambda^* = 0. \quad (1.102)$$

Wegen $AA^\dagger = A^\dagger A$ ergibt sich, dass $B^\dagger B = BB^\dagger$. Damit erhalten wir

$$\mathbf{x}^\dagger B^\dagger B \mathbf{x} = \mathbf{x}^\dagger B B^\dagger \mathbf{x} = (B^\dagger \mathbf{x})^\dagger B^\dagger \mathbf{x} = \|B^\dagger \mathbf{x}\|^2 = 0, \quad (1.103)$$

sodass $B^\dagger \mathbf{x}$ der Nullvektor ist und $B^\dagger \mathbf{x} = (A^\dagger - \lambda^* \mathbf{1})\mathbf{x} = 0$ gilt. Für eine normale Matrix sind also die Eigenwerte von A^\dagger die komplex konjugierten Eigenwerte von A . Es seien nun \mathbf{x}_i und \mathbf{x}_j zwei Eigenvektoren zu zwei unterschiedlichen Eigenwerten λ_i und λ_j . Dann gilt

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad (1.104)$$

$$A\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j. \quad (1.105)$$

Multiplizieren wir nun Gleichung (1.105) von links mit \mathbf{x}_i^\dagger , erhalten wir

$$\mathbf{x}_i^\dagger A \mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_i^\dagger \mathbf{x}_j. \quad (1.106)$$

Es gilt aber auch

$$\mathbf{x}_i^\dagger A = (A^\dagger \mathbf{x}_i)^\dagger = (\lambda_i^* \mathbf{x}_i)^\dagger = \lambda_i \mathbf{x}_i^\dagger. \quad (1.107)$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{x}_i^\dagger \mathbf{x}_j = 0. \quad (1.108)$$

Da wir $\lambda_i \neq \lambda_j$ vorausgesetzt haben, müssen die Eigenvektoren orthogonal sein.

Bemerkung: Für eine hermitesche Matrix ($A^\dagger = A$) gilt $\lambda = \lambda^*$. Somit sind die Eigenwerte reell.

1.2.7 Basiswechsel und Ähnlichkeitstransformationen

Vektoren kann man als Komponenten bezüglich einer gegebenen Basis darstellen. Mit der Basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ sei der Vektor \mathbf{v} durch

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n \quad (1.109)$$

gegeben, mit dem Spaltenvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (1.110)$$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Koordinaten ändern, wenn wir auf eine alternative Basis übergehen. Dafür führen wir eine neue Basis $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ ein. Die Basisvektoren seien durch

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n S_{ij} \mathbf{e}_i \quad (1.111)$$

miteinander verknüpft. Damit ergibt sich für den Vektor \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n v'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^n v'_j \sum_{i=1}^n S_{ij} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n v'_j S_{ij} \right) \mathbf{e}_i. \quad (1.112)$$

Wir identifizieren also

$$v_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} v'_j. \quad (1.113)$$

Kompakter lässt sich schreiben:

$$\mathbf{v} = S\mathbf{v}' \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v}' = S^{-1}\mathbf{v}, \quad (1.114)$$

mit der Transformationsmatrix S , die den Basiswechsel beschreibt. Wir können in ähnlicher Weise die Transformation des linearen Operators A beschreiben. Es gelte $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ in der Basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. In der Basis $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ lautet die Transformation $\mathbf{y}' = A'\mathbf{x}'$. Mit der Relation von oben erhalten wir

$$\mathbf{y} = S\mathbf{y}' = A\mathbf{x} = AS\mathbf{x}' \quad (1.115)$$

$$\Rightarrow S\mathbf{y}' = AS\mathbf{x}' \quad (1.116)$$

$$\Rightarrow \mathbf{y}' = S^{-1}AS\mathbf{x}' = A'\mathbf{x}'. \quad (1.117)$$

Damit ergibt sich

$$A' = S^{-1}AS. \quad (1.118)$$

Die obige Gleichung ist ein Beispiel für eine *Ähnlichkeitstransformation*. Solche Ähnlichkeitstransformationen sind sehr nützlich, da sie Rechnungen stark vereinfachen können. Für Ähnlichkeitstransformationen ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

(i) Falls $A = \mathbf{1}$, dann gilt $A' = \mathbf{1}$, da

$$A' = S^{-1}\mathbf{1}S = S^{-1}S = \mathbf{1}. \quad (1.119)$$

(ii) Es gilt: $\det(A) = \det(A')$, da

$$\det(A') = \det(S^{-1}AS) = \det(SS^{-1}A) = \det(A). \quad (1.120)$$

(iii) Das charakteristische Polynom und damit die Eigenwerte von A stimmen mit denen von A' überein:

$$\det(A' - \lambda\mathbf{1}) = \det(S^{-1}AS - \lambda\mathbf{1}) = \det(S^{-1}(A - \lambda\mathbf{1})S) \quad (1.121)$$

$$= \det(SS^{-1}(A - \lambda\mathbf{1})) = \det(A - \lambda\mathbf{1}). \quad (1.122)$$

(iv) Die Spur einer Matrix ist invariant unter Basiswechseln:

$$\operatorname{tr}(A') = \sum_i A'_{ii} = \sum_{i,j,k} (S^{-1})_{ij} A_{jk} S_{ki} = \sum_{i,j,k} S_{ki} (S^{-1})_{ij} A_{jk} \quad (1.123)$$

$$= \sum_{j,k} \delta_{jk} A_{jk} = \sum_j A_{jj} = \operatorname{tr}(A). \quad (1.124)$$

Bemerkung: Von besonderer Bedeutung sind *unitäre* Transformationen, bei denen S eine unitäre Matrix ist. Unitäre Transformationen führen Orthogonalbasen ineinander über. Für unitäre Transformationen gilt ferner:

- (i) Falls A hermitesch (antihermitesch), dann ist auch A' hermitesch (antihermitesch).
- (ii) Falls A unitär ist ($A^\dagger = A^{-1}$), dann ist auch A' unitär.

1.2.8 Diagonalisierung von Matrizen

A sei die Darstellung eines linearen Operators bezüglich der Basis $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Nun betrachten wir eine alternative Basis $\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n S_{ij} \mathbf{e}_i$, wobei \mathbf{x}_j die Eigenvektoren des linearen Operators A sind, d.h. es gilt

$$A\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j. \quad (1.125)$$

In der neuen Basis gilt $A' = S^{-1}AS$. Das Matrixelement S_{ij} ist dann einfach die i -te Komponente des j -ten Eigenvektors, sodass wir $S = (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n)$ erhalten. Daraus folgt

$$A'_{ij} = (S^{-1}AS)_{ij} = \sum_{k,l} (S^{-1})_{ik} A_{kl} S_{lj} = \sum_{k,l} (S^{-1})_{ik} A_{kl} (\mathbf{x}_j)_l \quad (1.126)$$

$$= \sum_{k,l} (S^{-1})_{ik} \lambda_j (\mathbf{x}_j)_k = \sum_k \lambda_j (S^{-1})_{ik} S_{kj} = \lambda_j \delta_{ij}. \quad (1.127)$$

Die Matrix A' lautet also

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (1.128)$$

Damit ist das „Rezept“ zur Diagonalisierung von Matrizen vervollständigt. Da die Matrix S invertierbar sein muss, müssen die n Eigenvektoren linear unabhängig sein und eine Basis des zugehörigen Vektorraums bilden.

Kapitel 2

Differentialrechnung

2.1 Die lineare Näherung einer Funktion

Wir wollen den Funktionswert der Funktion $f(x)$ an der Stelle $f(x + \Delta x)$ abschätzen, so dass der Fehler von der Ordnung $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$ ist. Also

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2). \quad (2.1)$$

Wir definieren

$$\Delta f(x) \equiv f(x + \Delta x) - f(x), \quad (2.2)$$

so dass

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2), \quad (2.3)$$

falls eine solche Funktion $f'(x)$ existiert. Man nennt die Funktion *erste Ableitung* von $f(x)$. Der führende Term ist das totale Differential

$$df(x) \equiv f'(x)\Delta x, \quad (2.4)$$

$$\text{bzw. } \Delta f = df + \mathcal{O}((\Delta x)^2). \quad (2.5)$$

Wir werden auf diesen Begriff im Folgenden zurückkommen. Die Ableitung kann man offensichtlich aus dem Differenzenquotienten

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad (2.6)$$

im Limes $\Delta x \rightarrow \infty$ bestimmen.

Beispiel:

$$f(x) = ax^n \quad (2.7)$$

$$\rightsquigarrow f(x + \Delta x) = ax^n + anx^{n-1}\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax^n + anx^{n-1}\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2) - ax^n}{\Delta x} \\ &= anx^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Für infinitesimale Werte von Δx gilt

$$\Delta f = df + \mathcal{O}((dx)^2) \quad \text{mit} \quad df = f'(x)dx. \quad (2.10)$$

Dieser Ausdruck führt auf die Schreibweise

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f \equiv f^{(1)}(x). \quad (2.11)$$

Analog gilt die Schreibweise

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = f^{(n)}(x). \quad (2.12)$$

2.1.1 Die Ableitung der Umkehrfunktion

Für Funktionen mit $y=f(x)$ gilt die Beziehung

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy} \right)^{-1}, \quad (2.13)$$

für Intervalle, für die $0 \neq \frac{dy}{dx}$ existiert. Wegen $x(y) = f^{-1}(y)$ ergibt sich also

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)}. \quad (2.14)$$

Beispiel:

$$f(x) = e^x = y \quad \Rightarrow \quad f^{-1} = \ln(y) \quad (2.15)$$

$$\rightsquigarrow \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{d \ln(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}. \quad (2.16)$$

2.1.2 Die Produktregel

Wir betrachten das Produkt zweier Funktionen

$$h(x) = f(x)g(x) \quad (2.17)$$

$$\rightsquigarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}, \quad \text{mit} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} h(x + \Delta x) &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) \\ &= \left(f(x) + f'(x)\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \right) \left(g(x) + g'(x)\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \right) \\ &= f(x)g(x) + \left[f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \right] \Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\rightsquigarrow h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (2.20)$$

Analog ergibt sich die Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}, \quad (2.21)$$

sowie die Kettenregel

$$f(g(x))' = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}. \quad (2.22)$$

2.2 Differentialrechnung im \mathbb{R}^n

2.2.1 Funktionen mehrerer Variablen

Funktionen mehrerer Variablen können Flächen im Raum beschreiben. Wenn beispielsweise die z -Koordinate Funktion der x - und y -Koordinate ist, d.h. $z = f(x, y)$ gilt, und die Funktion eindeutig und reellwertig ist, beschreibt sie eine Fläche im dreidimensionalen Raum (Beispiel: Die Oberfläche eines Gebirges ohne Überhänge). Die hier vorgestellten Begriffe und Methoden sind allgemeiner gültig. Zur Veranschaulichung ist es aber nützlich, sich der entsprechenden Begriffe zu bedienen.

Die *partielle Ableitung* ist die Ableitung der Funktion, bei der man eine Variable festhält. Man schreibt die partiellen Ableitungen in der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \partial_x f = f_x, \quad \text{bzw.} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \partial_y f = f_y. \quad (2.24)$$

Beispiel: Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y) = x^3y - e^{xy}$.

$$\partial_x f(x, y) = 3x^2y - ye^{xy}, \quad (2.25)$$

wobei die y -Variable wie eine Konstante behandelt wird. Analog ergibt sich

$$\partial_y f(x, y) = x^3 - xe^{xy}. \quad (2.26)$$

Man kann natürlich auch höhere und gemischte Ableitungen berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \partial_{xx} f = 6xy - y^2 e^{xy}, \quad (2.27)$$

$$\partial_{xy} f = 3x^2 - (1 + xy)e^{xy} = \partial_{yx} f, \quad \text{usw.} \quad (2.28)$$

In dem vorliegenden Beispiel kann man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen. Dies gilt aber nur dann, wenn die beiden gemischten Ableitungen in dem betreffenden Punkt stetig sind.

Die Regeln lassen sich in analoger Weise für Funktionen mit mehreren Variablen verallgemeinern.

2.2.2 Das totale Differential und die totale Ableitung

Beim totalen Differential betrachten wir die Änderung des Funktionswertes für simultane Änderungen von x und y .

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= \left[\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \right] \Delta x + \left[\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \right] \Delta y \\ &\approx \partial_x f(x, y) \Delta x + \partial_y f(x, y) \Delta y. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Für infinitesimale Änderungen wird die Formel exakt, also

$$df = \partial_x f dx + \partial_y f dy, \quad (2.30)$$

und für Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen ergibt sich analog

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (2.31)$$

Beispiel: Das totale Differential der Funktion $f(x, y) = y \exp(x + y)$:

$$df = \partial_x f dx + \partial_y f dy = y \exp(x + y) dx + (y + 1) \exp(x + y) dy. \quad (2.32)$$

Einschub:

Wir können die Kettenregel auch im Kontext mehrerer abhängiger Variablen verstehen. Dazu betrachten wir das Beispiel

$$y = \ln(\sin(2x)), \quad \text{mit} \quad (2.33)$$

$$y = \ln(u) \quad (2.34)$$

$$u = \sin(v) \quad (2.35)$$

$$v = 2x. \quad (2.36)$$

Da jede Funktion nur von einer Variablen abhängt, ergibt sich

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du, \quad du = \frac{\partial u}{\partial v} dv, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (2.37)$$

$$\rightsquigarrow dy = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} dx \equiv \frac{dy}{dx} dx. \quad (2.38)$$

Damit erhalten wir die Kettenregel

$$\frac{dy(u(v(x)))}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v} \frac{dv}{dx}, \quad (2.39)$$

da v nur von der Variablen x abhängt. Wir erhalten also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos(v) \cdot 2 = 2 \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} = 2 \cot(2x). \quad (2.40)$$

Für mehrere unabhängige Variablen ergibt sich dann:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \dots} \dots \frac{\partial \dots}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial \dots} \dots \frac{\partial \dots}{\partial y} dy + \dots \quad (2.41)$$

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^2 \sin(x) \quad \rightsquigarrow f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x). \quad (2.42)$$

Wenn wir nun $u \equiv \sin(x)$ und $v \equiv x^2$ definieren, lautet die Funktion $f(u, v) = uv$. Damit ergibt sich für die partielle Ableitung

$$\partial_v f(u, v) = u. \quad (2.43)$$

Das Differential der Funktion können wir nun sukzessive berechnen:

$$df = u dv + v du \quad (\text{Produktregel}) \quad (2.44)$$

$$dv = \frac{dv}{dx} dx = 2x dx \quad (2.45)$$

$$du = \frac{du}{dx} dx = \cos(x) dx \quad (2.46)$$

$$\rightsquigarrow df = \frac{df}{dx} dx = (2x \sin(x) + x^2 \cos(x)) dx \quad (2.47)$$

$$\rightsquigarrow \frac{df}{dx} = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x). \quad (2.48)$$

Die obige Formel galt für unabhängige Variablen. Wir betrachten aber nun den Fall, dass die Variablen voneinander abhängen und nur eine Variable tatsächlich unabhängig ist, also

$$x_i = x_i(x_1), \quad \text{mit } i = 2, \dots, n. \quad (2.49)$$

Man kann in diesem Fall die x_i durch x_1 ersetzen und dann das totale Differential der Funktion $f = f(x_1)$ berechnen. Alternativ kann man die totale Ableitung aus der Kettenregel

$$\frac{df}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dx_1} \quad (2.50)$$

bestimmen.

Beispiel: Bestimmen Sie die totale Ableitung von $f(x, y) = x^2 + 3xy$ mit $y = \arcsin(x)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x \quad (2.52)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.53)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = 2x + 3y + 3x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2.54)$$

Direkte Methode:

$$f(x) = x^2 + 3x \arcsin(x) \quad (2.55)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = 2x + 3 \arcsin(x) + 3x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.56)$$

$$= 2x + 3y + 3x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (2.57)$$

Beispiel: Partielle Ableitungen der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ in Polarkoordinaten $x = r \cos(\phi)$ und $y = r \sin(\phi)$.

$$\Rightarrow f(r, \phi) = r^2(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) \quad (2.58)$$

$$f(r, x) = 2x^2 - r^2 \quad (2.59)$$

$$f(r, y) = r^2 - 2y^2. \quad (2.60)$$

$$(2.61)$$

$$\Rightarrow (\partial_r f)_\phi = 2r(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) \quad (2.62)$$

$$(\partial_r f)_x = -2r \quad (2.63)$$

$$(\partial_r f)_y = 2r. \quad (2.64)$$

Partielle Ableitungen hängen davon ab, welche Variablen festgehalten werden.

2.2.3 Exakte und inexacte Differentiale

Bei einigen Problemstellungen ist die Funktion f zu einem gegebenen Differential gesucht. Die Bestimmung von f ist im Allgemeinen nicht trivial. Für das Beispiel $df = xdy + ydx$ kann man die Funktion $f(x, y) = xy + \text{const.}$ sofort angeben. Solche Differentiale nennt man exakt. Schwieriger wird es für

$$xdy + 3ydx = (\partial_y f(x, y))dy + (\partial_x f(x, y))dx. \quad (2.65)$$

Integration bezüglich x liefert

$$f(x, y) = 3xy + g(y), \quad (2.66)$$

und Integration bezüglich y führt auf

$$f(x, y) = xy + h(x). \quad (2.67)$$

Offensichtlich sind die beiden Resultate inkompatibel und das Differential nicht exakt. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für exakte Differentiale ist die folgende: Es sei

$$df = A(x, y)dx + B(x, y)dy. \quad (2.68)$$

Offensichtlich gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A, \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = B. \quad (2.70)$$

Wenn $f(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar in dem Punkt (x, y) ist, muss gelten

$$\partial_{xy}f = \partial_{yx}f, \quad \text{bzw.} \quad (2.71)$$

$$\partial_x B = \partial_y A. \quad (2.72)$$

Im vorangegangenen Beispiel gilt:

$$\partial_x B = 1, \quad (2.73)$$

$$\partial_y A = 3, \quad (2.74)$$

woraus wie erwartet folgt, dass das Differential nicht exakt ist. Für ein totales Differential in n Variablen ergibt sich entsprechend:

$$df = \sum_{i=1}^n g_i(x_1, \dots, x_n) dx_i. \quad (2.75)$$

Das Differential ist exakt, falls für alle Paare i, j gilt:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}. \quad (2.76)$$

2.2.4 Implizite Differentiation

Problemstellung: Manchmal ist ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Variablen x und y gegeben, der allerdings nicht in der Form $y = f(x)$ darstellbar ist.

Es ist dann immer möglich, eine Ableitung zu berechnen. Dies wollen wir zunächst an einem einfachen Beispiel erläutern. Wir betrachten dazu:

$$x + y = \cos(xy) + 0.1. \quad (2.77)$$

Diese Gleichung lässt sich nicht nach x oder y auflösen. Wir können die Gleichung aber in der Form

$$f(x, y) = \cos(xy) - x - y + 0.1 = 0 \quad (2.78)$$

schreiben. Das totale Differential df ergibt sich zu

$$df = \partial_x f dx + \partial_y f dy = 0 \quad (2.79)$$

$$\Rightarrow dy = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f} dx, \quad (2.80)$$

wenn wir y als unabhängige Variable betrachten. Gleichzeitig muss aber $dy = \frac{dy}{dx} dx$ gelten, so dass wir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f} \quad (2.81)$$

identifizieren können. Für unser Beispiel ergibt sich damit:

$$\partial_x f = -y \sin(xy) - 1 \quad (2.82)$$

$$\partial_y f = -x \sin(xy) - 1 \quad (2.83)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y \sin(xy) + 1}{x \sin(xy) + 1}, \quad (2.84)$$

also wieder eine implizite Funktion.

Die Betrachtungen lassen sich auf mehrere Variablen und höhere Ableitungen verallgemeinern.

Zweite Ableitung

Aus $y'' = \frac{dy'}{dx}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d(y') &= \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy = \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} \left(\frac{dy}{dx} \right) dx \\ &= \left(\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} y'(x, y) \right) dx \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\rightsquigarrow y''(x, y) = \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} y'(x, y). \quad (2.86)$$

Funktionen mehrerer unabhängiger Variablen:

$$f(x, y, z, \dots) = 0 \quad \Rightarrow \quad df = \partial_x f dx + \partial_y f dy + \partial_z f dz + \dots = 0. \quad (2.87)$$

$$\rightsquigarrow dy = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f} dx - \frac{\partial_z f}{\partial_y f} dz. \quad (2.88)$$

Aus dem Vergleich mit

$$dy = (\partial_x y)_z dx + (\partial_z y)_x dz \quad (2.89)$$

ergibt sich dann

$$(\partial_x y)_z = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}, \quad (2.90)$$

$$(\partial_z y)_x = -\frac{\partial_z f}{\partial_y f} \quad (2.91)$$

für die partiellen Ableitungen von $y(x, z)$.

Das Verfahren lässt sich auch weiter verallgemeinern. Im Beispiel

$$z - x + y + t - 1 = 0 \quad (2.92)$$

$$2x + z - y + 3t^2 = 0 \quad (2.93)$$

liegt ein funktioneller Zusammenhang zwischen vier Variablen vor. Von diesen Variablen sind wegen der obigen Gleichungen nur zwei unabhängig. Obwohl wir hier eine explizite Form einer Funktion $x(y, z)$ konstruieren könnten, wollen wir wieder die Technik der impliziten Ableitung anwenden.

Es gilt gemäß (2.92):

$$dz - dx + dy + dt = 0. \quad (2.94)$$

Aus Gleichung (2.93) folgt der Zusammenhang

$$2dx + dz - dy + 6tdt = 0. \quad (2.95)$$

Wenn wir nun $dt = dx - dy - dz$ eliminieren, erhalten wir:

$$6tdz - 6zdx + 6tdy - 2dx - dz + dy = 0 \quad (2.96)$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1+6t}{2+6t}dy - \frac{1-6t}{2+6t}dz, \quad (2.97)$$

beziehungsweise

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1+6t(y,z)}{2+6t(y,z)}, \quad (2.98)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -\left(\frac{1-6t}{2+6t}\right). \quad (2.99)$$

2.2.5 Extremwerte

Für Funktionen $y = f(x)$ wird durch die Ableitung $y'(x)$ die Steigung der Tangente an der Stelle x bestimmt. Für eine waagerechte Tangente gilt entsprechend, dass die Funktion bei x entweder ein Maximum (Übergang von positiver zu negativer Steigung), ein Minimum (Übergang von negativer zu positiver Steigung) oder einen Sattelpunkt besitzt.

Man nennt Punkte, an denen $y'(x) = 0$ gilt auch stationäre Punkte.

Man kann die stationären Punkte durch die zweite Ableitung unterscheiden: Für $y'(x) = 0$ gilt:

$$y''(x) > 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$y''(x) = 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum, Maximum oder Sattelpunkt}$$

$$y''(x) < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximum.}$$

Für $y''(x) = 0$ muss man weitere Untersuchungen durchführen. Wir wollen nun die Bestimmung von Extremstellen für Funktionen mehrerer Variablen diskutieren. Dabei beschränken wir uns zunächst auf Funktionen zweier Variablen.

Für stationäre Punkte von Funktionen $z = f(x, y)$ gilt:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0. \quad (2.100)$$

Die obige Gleichung muss wegen der Unabhängigkeit von x, y für beliebige dx, dy gelten. Deshalb müssen die Koeffizienten $\partial_x z$ und $\partial_y z$ verschwinden. Dies ist jedoch nur ein notwendiges Kriterium. Ähnlich wie in einer Dimension kann man mit den zweiten

Ableitungen die stationären Punkte weiter charakterisieren.
Für ein *Maximum* gilt:

$$D = (\partial_x^2 f)(\partial_y^2 f) - (\partial_x \partial_y f)^2 > 0, \quad (2.101)$$

$$(\partial_x^2 f) < 0, \quad (2.102)$$

$$(\partial_y^2 f) < 0. \quad (2.103)$$

Für ein *Minimum* gilt:

$$D = (\partial_x^2 f)(\partial_y^2 f) - (\partial_x \partial_y f)^2 > 0, \quad (2.104)$$

$$(\partial_x^2 f) > 0, \quad (2.105)$$

$$(\partial_y^2 f) > 0. \quad (2.106)$$

Ein Sattelpunkt liegt für $D < 0$ vor. Für $D = 0$ muss die Funktion mit Hilfe höherer Ableitungen untersucht werden.

Beispiel: Bestimmung der Extremwerte von

$$f(x, y) = xy + x^2 + y^2 - 6y. \quad (2.107)$$

$$\partial_x f = y + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -2x \quad (2.108)$$

$$\partial_y f = x + 2y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 4x = 6, \quad \text{bzw.} \quad (2.109)$$

$$x = -2, y = 4. \quad (2.110)$$

Für die zweiten Ableitungen gilt:

$$\partial_x^2 f = 2, \quad (2.111)$$

$$\partial_y^2 f = 2, \quad (2.112)$$

$$\partial_x \partial_y f = 1. \quad (2.113)$$

Wegen $D = 3 > 0$ und $\partial_x^2 f = \partial_y^2 f = 1 > 0$ liegt ein Minimum vor.

Für Funktionen mit mehr als zwei Variablen gilt als notwendige Bedingung für einen stationären Punkt

$$\partial_x f = \partial_y f = \partial_z f = \dots = 0. \quad (2.114)$$

Wenn alle Eigenwerte der Matrix der zweiten Ableitungen positiv (negativ) sind, handelt es sich um ein Minimum (Maximum). Wir werden später genauer auf die Bestimmung von Eigenwerten und die Charakterisierung von stationären Punkten eingehen.

Extrema mit Nebenbedingungen

Zur Einführung betrachten wir folgendes Beispiel: Bestimme den größtmöglichen Quader, der vollständig innerhalb einer Kugel mit Radius R liegt.

Die Kugeloberfläche (Kugel um den Ursprung) ist gegeben durch

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (2.115)$$

das Quadervolumen durch

$$f(x, y, z) = 2x \cdot 2y \cdot 2z. \quad (2.116)$$

Wegen $V > 0$ können wir auch die Funktion

$$f(x, y, z) \equiv \frac{V^2}{64} = x^2 y^2 z^2 \quad (2.117)$$

betrachten. Offensichtlich berührt der Quader die Kugeloberfläche mit den Ecken, so dass Gleichung (2.115) erfüllt sein muss.

Die direkteste Methode besteht darin, dass man die Nebenbedingung (2.115) benutzt, um eine Variable zu eliminieren. Es gilt:

$$x^2 = R^2 - y^2 - z^2 \quad \rightsquigarrow \quad f(x, y, z) = (R^2 - y^2 - z^2)y^2 z^2. \quad (2.118)$$

Damit ergibt sich

$$\partial_y f = -2y^3 z^2 + 2y z^2 (R^2 - y^2 - z^2) = 2y z^2 (R^2 - 2y^2 - z^2) = 0 \quad (2.119)$$

$$\partial_z f = -2y^2 z^3 + 2y^2 z (R^2 - y^2 - z^2) = 2y^2 z (R^2 - y^2 - 2z^2) = 0. \quad (2.120)$$

Die Gleichung ist offenbar erfüllt, falls $y = 0$ oder $z = 0$ gilt. In diesem Fall gilt aber $V = 0$. Also müssen die Ellipsengleichungen

$$R^2 - 2y^2 - z^2 = 0 \quad (2.121)$$

$$R^2 - y^2 - 2z^2 = 0 \quad (2.122)$$

gleichzeitig erfüllt sein. Mit $z^2 = R^2 - 2y^2$ ergibt sich

$$R^2 - y^2 - 2R^2 + 4y^2 = 0, \quad (2.123)$$

beziehungsweise

$$y = \frac{R}{\sqrt{3}} = z = x. \quad (2.124)$$

Damit ist der größte eingeschlossene Quader ein Würfel mit Kantenlänge $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

2.3 Stationäre Punkte von Funktionen mit mehreren Variablen

Die notwendige Bedingung für das Auftreten eines stationären Punktes ist das Verschwinden der partiellen Ableitungen von $f(x_1, \dots, x_n)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad \text{für alle } x_i. \quad (2.125)$$

Wenn wir nun die Art des stationären Punktes bestimmen wollen, können wir die Taylor-Entwicklung betrachten. In führender Ordnung gilt am stationären Punkt ($\partial_{x_i} = 0$):

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \approx \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j. \quad (2.126)$$

Nun sei die Matrix M definiert durch

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \text{so dass } \Delta f = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^\top M \Delta \mathbf{x}, \quad (2.127)$$

mit $\Delta \mathbf{x}^\top = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$. Da die Matrix symmetrisch ist, hat sie reelle Eigenwerte λ_r und n orthogonale Eigenvektoren \mathbf{e}_r , so dass für normierte Eigenvektoren \mathbf{e}_r gilt:

$$M \mathbf{e}_r = \lambda_r \mathbf{e}_r, \quad (2.128)$$

$$\mathbf{e}_r^\top \mathbf{e}_s = \delta_{rs}. \quad (2.129)$$

Die Eigenvektoren bilden eine Basis im \mathbb{R}^n , so dass

$$\Delta \mathbf{x} = \sum_r \alpha_r \mathbf{e}_r, \quad (2.130)$$

und damit

$$\Delta f = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^\top M \Delta \mathbf{x} = \frac{1}{2} \sum_r \lambda_r \alpha_r^2. \quad (2.131)$$

Ein Minimum liegt also vor, wenn *alle* Eigenwerte von M positiv sind; ein Maximum, wenn *alle* Eigenwerte negativ sind. Falls einige Eigenwerte positiv und einige negativ sind liegt ein Sattelpunkt vor.

Bemerkung: Sollten einige Eigenwerte Null und die übrigen alle positiv (bzw. negativ) sein, so kann mit dieser Methode nicht entschieden werden, welche Art des stationären Punktes vorliegt.

Wir wollen nun die Bedingungen für eine Funktion $f(x, y)$ explizit formulieren. Die Matrix M lautet in diesem Fall

$$M = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}. \quad (2.132)$$

Die Eigenwertgleichung lautet dann:

$$(f_{xx} - \lambda)(f_{yy} - \lambda) - f_{xy}^2 = 0 \quad (2.133)$$

$$\Rightarrow 2\lambda = (f_{xx} + f_{yy}) \pm \sqrt{(f_{xx} - f_{yy})^2 + 4f_{xy}^2}. \quad (2.134)$$

Damit liegt ein Minimum vor, falls $f_{xx}, f_{yy} > 0$ und

$$f_{xx} + f_{yy} > \sqrt{(f_{xx} + f_{yy})^2 - 4(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)}, \quad \text{bzw.} \quad (2.135)$$

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0. \quad (2.136)$$

Analog für Maxima und Sattelpunkte.

2.4 Extrema mit Nebenbedingungen

Im vorangegangenen Kapitel haben wir uns mit der Charakterisierung von Extrema *unabhängiger* Variablen beschäftigt. Häufig gibt es aber weitere Zwangsbedingungen, die einen Zusammenhang zwischen den Variablen herstellen. Beispiele für solche Fragestellungen sind: Finde das Maximum einer Funktion $f(x, y)$ auf einem Kreis mit Radius R , so dass $x^2 + y^2 = R^2$.

Eine Möglichkeit zur Lösung eines solchen Problems besteht natürlich darin, die Zwangsbedingungen dazu zu nutzen, die abhängigen Variablen zu ersetzen.

Einen direkteren Zugang bietet die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren. Dazu betrachtet man die Funktion $f(x, y)$, deren Maximum wir unter der Zwangsbedingung $g(x, y) = c$ bestimmen wollen. Für unabhängige Variablen muss für ein Maximum

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0, \quad (2.137)$$

und damit $f_x = 0 = f_y$ gelten. Durch den Zusammenhang zwischen x und y sind dx und dy nicht unabhängig, so dass aus der Stationarität nicht notwendigerweise $f_x = 0 = f_y$ folgt.

Für die Zwangsbedingung folgt aber

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0, \quad (2.138)$$

da $g(x, y) = c = \text{const.}$ gilt. Damit erhalten wir die Beziehung zwischen dx und dy und fordern nun:

$$d(f + \lambda g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) dy = 0. \quad (2.139)$$

Wir fordern nun, dass in dieser Gleichung dx und dy unabhängig sind, so dass λ die Bedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad (2.140)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \quad (2.141)$$

erfüllen muss. Die obigen Gleichungen legen zusammen mit der Zwangsbedingung $g(x, y) = c$ die Variablen x, y, λ der stationären Punkte fest.

Beispiel: Bestimmen Sie das Maximum der Funktion

$$f(x, y) = 1 + xy \quad (2.142)$$

auf dem Einheitskreis!
Es gilt also offenbar

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 1 \quad (2.143)$$

$$\rightsquigarrow y + 2\lambda x = 0, \quad (2.144)$$

$$x + 2\lambda y = 0. \quad (2.145)$$

Setzt man Gl. (2.144) in Gl. (2.145) ein, erhält man

$$(1 - 4\lambda^2)y = 0, \quad (2.146)$$

mit den Lösungen $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ und $x = \mp y$. Wir unterscheiden daher zwei Fälle:

$$y = x \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.147)$$

sowie

$$y = -x \quad \Rightarrow \quad x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.148)$$

Die Maximalwerte werden für $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ angenommen, die übrigen stationären Punkte sind Minima.

Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren kann man auf mehrere Variablen verallgemeinern. Wir suchen also Extrema der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ mit den Nebenbedingungen

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.149)$$

$$\vdots \quad (2.150)$$

$$g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (m < n). \quad (2.151)$$

Die Extrema ergeben sich aus $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ ($i = 1, \dots, n$) und den Nebenbedingungen, wobei

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n). \quad (2.152)$$

Bemerkung: Die Wahl $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ stellt keine Einschränkung dar, da man die jeweiligen Konstanten einfach auf beiden Seiten abziehen kann.

Herleitung der Formel zu den Extrema mit Nebenbedingungen

$$dg = \partial_x g dx + \partial_y g dy = 0 \quad \xrightarrow{\partial_y g \neq 0} \quad dy = -\frac{\partial_x g}{\partial_y g} dx. \quad (2.153)$$

Damit erhalten wir für die Stationarität:

$$df = \partial_x f dx - \frac{\partial_x g}{\partial_y g} \partial_y f dx = 0. \quad (2.154)$$

Die Position des stationären Punkts ist also bestimmt durch

$$\left(\partial_x f - \frac{\partial_y f}{\partial_y g} \partial_x g \right) = 0 \quad (2.155)$$

$$g(x, y) = c. \quad (2.156)$$

Wenn man nun die Variable $\lambda = -\frac{\partial_y f}{\partial_y g}$ einführt, erhält man

$$\partial_x f + \lambda \partial_x g = 0. \quad (2.157)$$

Aus (2.155) folgt auch, dass $\lambda = -\frac{\partial_y f}{\partial_y g} = -\frac{\partial_x f}{\partial_x g}$ und somit

$$\partial_y f + \lambda \partial_y g = 0. \quad (2.158)$$

Dies ist die Art von Gleichung, die sich auch aus der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren ergibt.

Ideen:

- Durch die Nebenbedingungen sind die Variablen und damit die Differentiale nicht mehr unabhängig, z.B. aus $g(x, y) = \text{const.} = c$ folgt $dg = \partial_x g dx + \partial_y g dy = 0$, bzw. $dy = -\frac{\partial_x g}{\partial_y g} dx$ bzw. $dx = -\frac{\partial_y g}{\partial_x g} dy$.
- Für das Extremum mit Nebenbedingungen müssen $df = 0$ und die Nebenbedingungen gleichzeitig erfüllt sein, z.B. für $f(x, y)$:

$$df = \partial_x f dx - \frac{\partial_y f}{\partial_y g} \partial_x g dx = 0. \quad (2.159)$$

Damit ergibt sich mit $\lambda = -\frac{\partial_y f}{\partial_y g} = -\frac{\partial_x f}{\partial_x g}$ die Gültigkeit der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

•

$$d(f + \lambda g) = \underbrace{(\partial_x f + \lambda \partial_x g)}_{=0 \text{ (i)}} dx + \underbrace{(\partial_y f + \lambda \partial_y g)}_{=0 \text{ (ii)}} dy = 0. \quad (2.160)$$

Aus (i) und (ii) und $g(x, y) = c$ ergibt sich dann das Extremum.

Beispiel: Kürzester Abstand der Geraden $y = x + 4$ zur Ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Schnittpunkt:

$$x^2 + 4(x + 4)^2 = 5x^2 + 32x + 64 \stackrel{!}{=} 4 \quad (2.161)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{16}{5}\right)^2 = -12 < 0. \quad (2.162)$$

Die Gerade und die Ellipse besitzen also keinen Schnittpunkt. Für das Abstandsquadrat gilt:

$$f(a, b, c, d) = (a - c)^2 + (b - d)^2, \quad (2.163)$$

mit dem Punkt (a, b) auf der Geraden und (c, d) auf der Ellipse.

$$\Rightarrow g_1 = b - a - 4 = 0, \quad g_2 = c^2 + 4d^2 - 4 = 0, \quad F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \quad (2.164)$$

$$\partial_a F = 2(a - c) - \lambda_1 = 0, \quad \partial_c F = -2(a - c) + 2c\lambda_2 = 0 \quad (2.165)$$

$$\partial_b F = 2(b - d) + \lambda_1 = 0, \quad \partial_d F = -2(b - d) + 8d\lambda_2 = 0 \quad (2.166)$$

$$\partial_{\lambda_1} F = b - a - 4 = 0, \quad \partial_{\lambda_2} F = c^2 + 4d^2 - 4 = 0. \quad (2.167)$$

Mit den Ausdrücken für $\partial_x f$ und $\partial_y f$ ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}. \quad (2.168)$$

2.4.1 Taylor-Entwicklungen

In höheren Dimensionen lautet die Taylor-Entwicklung

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(\Delta \mathbf{x} \cdot \nabla)^n f(\mathbf{x})]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad (2.169)$$

mit $\Delta x_i = x_i - x_{i_0}$ und $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^\top$, $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ und $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})^\top$ (Gradient). Spezialfälle: $n = 2$

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) \right]_{x_0, y_0}. \quad (2.170)$$

Entwicklung von $f(x, y)$ bis zur zweiten Ordnung $(\Delta x)^2$ bzw. $(\Delta y)^2$ bzw. $(\Delta x \Delta y)$:

$$\frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right] = \frac{1}{2!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y). \quad (2.171)$$

Beispiel: $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$; Entwicklung um die Stelle $x_0 = 0 = y_0$.

$$f(x, y) \simeq f(0, 0) + \partial_x f(0, 0) \Delta x + \partial_y f(0, 0) \Delta y + \frac{1}{2} (\partial_x^2 f(0, 0) \Delta x^2 + 2 \partial_x \partial_y f(0, 0) \Delta x \Delta y + \partial_y^2 f(0, 0) \Delta y^2) + \dots \quad (2.172)$$

1. Ordnung:

$$f(0, 0) = 0 \quad (2.173)$$

$$\partial_x f(x, y) = \cos(x) \cos(y) \quad (2.174)$$

$$\partial_y f(x, y) = -\sin(x) \sin(y) \quad (2.175)$$

$$\partial_x f(0, 0) = 1 \quad (2.176)$$

$$\partial_y f(0, 0) = 0 \quad (2.177)$$

2. Ordnung:

$$\partial_x^2 f(x, y) = -\sin(x) \cos(y) \quad (2.178)$$

$$\partial_x \partial_y f(x, y) = -\cos(x) \sin(y) \quad (2.179)$$

$$\partial_y^2 f(x, y) = -\sin(x) \cos(y) \quad (2.180)$$

3. Ordnung:

$$\partial_x^2 \partial_y f(0, 0) = \partial_y^3 f(0, 0) = 0 \quad (2.181)$$

$$\partial_y^2 \partial_x f(0, 0) = \partial_x^3 f(0, 0) = -1. \quad (2.182)$$

$$\rightsquigarrow \sin(x) \cos(y) = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{xy^2}{2} + \dots \quad (2.183)$$

Kapitel 3

Reihen und Folgen

3.1 Berechnung von Reihen

Das Induktionsprinzip: Ist M eine Teilmenge von \mathbb{N} mit den Eigenschaften

- (i) $1 \in M$.
 - (ii) Aus $k \in M$ folgt auch $k + 1 \in M$,
- so ist $M = \mathbb{N}$.

3.1.1 Die vollständige Induktion

Zur Erläuterung des Prinzips betrachten wir die Summe der ersten n Quadratzahlen:

$$A(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad (3.1)$$

$$\text{bzw. } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \quad (3.2)$$

Induktionsanfang: Wir überprüfen zunächst, ob die Aussage für $n = 1$ gültig ist.

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1). \quad (3.3)$$

Induktionsschritt: Wir überprüfen die Aussage für $n+1$ unter der Voraussetzung, dass sie für n gültig ist.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{(3.3)}{=} \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)[2n^2 + 7n + 6] = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1). \quad \blacksquare \quad (3.5)$$

Weitere Beispiele:

(i) Summe der ungeraden Zahlen

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2. \quad (3.6)$$

Induktionsanfang: $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 1^2 = 1. \quad (3.7)$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) &= \sum_{k=1}^n (2k - 1) + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (3.8)$$

(ii) Die geometrische Summenformel

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b) \left[a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} \right] \\ &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Bemerkung:

- Für $n = 2$ ergibt sich die binomische Formel $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
- Mit $a = 1$ und $b = q$ ergibt sich

$$(1 - q) \sum_{k=0}^n q^{n-k} = 1 - q^{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (3.10)$$

Beweis von Gl. (3.9):

Induktionsanfang $n = 1$:

$$a - b = (a - b) \sum_{k=0}^0 a^k b^{-k} = a - b. \quad (3.11)$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
 a^{n+1} - b^{n+1} &= a^{n+1} - ba^n + ba^n - b^{n+1} \\
 &= b(a^n - b^n) + a^n(a - b) \\
 &\stackrel{(3.9)}{=} b(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} + a^n(a - b) \\
 &= (a - b) \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} + a^n \right] \\
 &= (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}. \quad \blacksquare \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

3.2 Unendliche Reihen

3.2.1 Konvergenz und Divergenz von Reihen

Gegeben seien die reellen Zahlen a_0, a_1, \dots . Wir bilden die Partialsummen

$$s_n := a_0 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k. \tag{3.13}$$

Besitzt die Folge (s_n) einen Grenzwert a , so schreiben wir

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \tag{3.14}$$

und nennen die Reihe konvergent, andernfalls divergent.

Beispiele:

(i) Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{für } |q| < 1. \tag{3.15}$$

Es gilt:

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \text{für } q \neq 1. \tag{3.16}$$

Für $|q| < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$. ■

(ii)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1, \quad \text{da} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ \Rightarrow s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.18)$$

(iii) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k$ konvergiert nicht, da

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (3.19)$$

(iv) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, da

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.2.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Monotoniekriterium: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Majorantenkriterium: Gilt von einer Nummer N ab $|a_k| \leq b_k$ und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt Majorante für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beispiel:

Behauptung: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $N > 2|x|$. Für jedes $k \geq N$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^k}{k!} \right| &= \left| \frac{x^N}{N!} \right| \cdot \frac{|x|}{N+1} \cdots \frac{|x|^N}{k} \leq \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-N} \\ &= \frac{|2x|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^k =: M \left(\frac{1}{2} \right)^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} M \left(\frac{1}{2} \right)^k \end{aligned} \quad (3.21)$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} M \left(\frac{1}{2} \right)^k$ ist eine Majorante der Reihe und konvergent. Damit konvergiert die obige Reihe. ■

Quotientenkriterium: Man bildet den Quotienten der Reihenglieder a_n und a_{n+1} ,

$$\rho_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|. \quad (3.22)$$

Konvergenzeigenschaften: Sei

$$\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n, \quad (3.23)$$

so gilt

$$\begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow & \text{die Reihe ist absolut konvergent,} \\ \rho = 1 \Rightarrow & \text{keine Entscheidung möglich,} \\ \rho > 1 \Rightarrow & \text{die Reihe divergiert.} \end{cases} \quad (3.24)$$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Rightarrow \rho_n = \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! \right| = \frac{1}{n+1}. \quad (3.25)$$

Wegen $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ ist die Reihe konvergent.

Wurzelkriterium: Es ist manchmal vorteilhaft, die n -te Wurzel des Absolutbetrages von a_n zu betrachten. Dann gilt

$$\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|} \equiv |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad (3.26)$$

und mit $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$ ergibt sich für

$$\begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow & \text{die Reihe ist absolut konvergent,} \\ \rho = 1 \Rightarrow & \text{keine Aussage ist möglich,} \\ \rho > 1 \Rightarrow & \text{die Reihe ist divergent.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Beispiel:

$$a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n \Rightarrow \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right|} = \frac{3}{2}. \quad (3.28)$$

Damit ist die Reihe divergent.

3.2.3 Leibnizkriterium für alternierende Reihen

Bilden die positiven Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$. Für die Teilsummen $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ und den Grenzwert einer solchen Leibniz-Reihe gelten die Abschätzungen

$$s_{2n+1} < s \leq s_{2n} \quad \text{und} \quad |s - s_n| \leq a_n \quad (3.29)$$

Beweis:

Wegen $a_{2n-1} \geq a_{2n} \geq a_{2n+1}$ gilt:

- Die ungeraden Glieder wachsen, gemäß

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} \geq s_{2n-1} = s_{2(n-1)+1}. \quad (3.30)$$

- Die geraden Glieder fallen, gemäß

$$s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-2} = s_{2(n-1)}. \quad (3.31)$$

- Gerade und ungerade Glieder konvergieren gegeneinander, gemäß

$$s_{2n} - s_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+1} \rightarrow 0, \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (3.32)$$

Für den Grenzwert gilt:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}, \quad (3.33)$$

da wir die Konvergenz der alternierenden Reihe vorausgesetzt haben.

Für gerades n ist $s_{n+1} \leq s \leq s_n$, also

$$|s - s_n| = s_n - s \leq s_n - s_{n+1} = a_{n+1} \leq a_n. \quad (3.34)$$

Für ungerades n ist $s_n \leq s \leq s_{n-1}$, also

$$|s - s_n| = s - s_n \leq s_{n-1} - s_n = a_n \leq a_n. \quad (3.35)$$

**Beispiele:**

- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ konvergiert, da die a_k eine monoton fallende Nullfolge bilden.
- $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\log(k)}$ konvergiert ebenfalls.
- Die Monotonie der Nullfolge ist wichtig, wie Sie an der alternierenden Reihe mit $a_{2n} = \frac{1}{2n}$ und $a_{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$ erkennen. Die geraden und die ungeraden Summanden bilden für sich monoton fallende Nullfolgen; für die gesamte Reihe gilt dies aber nicht. Offensichtlich divergiert die Reihe, da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert und damit auch $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

3.2.4 Potenzreihen

Bisher haben wir ausschließlich Reihen mit konstanten Gliedern betrachtet. Bei Potenzreihen sind die Reihenglieder Funktionen von Variablen, die die Form $a_n(x - x_0)^n$ haben. x_0 nennt man den Entwicklungspunkt der Reihe. Für $x_0 = 0$ hat die Potenzreihe die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (3.36)$$

Im Konvergenzbereich der Potenzreihe hängt die Summe

$$\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (3.37)$$

von der Variablen x ab, d.h. sie konvergiert gegen die Funktion $\rho(x)$.

Beispiel:

Aus dem Quotientenkriterium ergibt sich, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n}$ für $|x| < 2$ konvergent und für $|x| > 2$ divergent ist.

Bemerkung: Die Konvergenzgeschwindigkeit (also die Anzahl der Reihenglieder, die man für eine gute Approximation berücksichtigen muss) hängt von x ab. Am Rand des Konvergenzgebiets konvergiert die Reihe langsamer.

Wichtig ist die Umkehrung des Prinzips: Wir entwickeln eine Funktion in eine Potenzreihe. Diese Methode ist für viele Probleme in der Physik extrem wichtig!

Für eine gegen $f(x)$ konvergierende Potenzreihe gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad (3.38)$$

$$\rightarrow f(x_0) = a_0; \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \Rightarrow f'(x_0) = a_1. \quad (3.39)$$

Allgemein ergibt sich:

$$f^{(n)}(x_0) \equiv \left. \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|_{x=x_0} = a_n n! \quad (3.40)$$

Dieser Zusammenhang wird für die Taylor-Entwicklung einer Funktion benutzt.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x - x_0)^n f^{(n)}(x_0), \quad (3.41)$$

wobei $x \in$ Konvergenzgebiet.

Durch die Taylorformel können wir die Reihenentwicklung einiger wichtiger Funktionen einfach angeben. Wir wählen dazu $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{(n/2)} \sin(x), & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (-1)^n \cos(x), & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (3.42)$$

Für alle geraden Reihenglieder ergibt sich $f^{(n)}(x_0 = 0) = 0$, so dass

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \quad (3.43)$$

Analog ergibt sich:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \quad (3.44)$$

Besonders einfach ist die Form der Exponentialreihe wegen $f^{(n)}(x) = e^x$, woraus folgt $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, so dass

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (3.45)$$

3.3 Berechnung von Reihensummen

3.3.1 Direkte Methoden

Indextransformation

Für eine Reihensumme gilt offenbar

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+i}^{n+i} a_{k-i} = \sum_{k=m-i}^{n-i} a_{k+i}. \quad (3.46)$$

Diese einfache Grundtatsache kann man sehr effektiv zur Berechnung von Reihensummen heranziehen.

Beispiel: Wir betrachten die arithmetische Summe

$$s = \sum_{k=0}^n ka = 0 \cdot a + a + 2a + \cdots + na. \quad (3.47)$$

Durch die Transformation $k \rightarrow n - k$ können wir die Reihe auch in der Form $s = \sum_{k=0}^n (n - k)a = na + (n - 1)a + \cdots + a + 0$ schreiben. Damit erhalten wir

$$2s = \sum_{k=0}^n ka + \sum_{k=0}^n (n - k)a = \sum_{k=0}^n na = n(n + 1)a \quad (3.48)$$

$$\rightsquigarrow s = \frac{n(n + 1)a}{2}. \quad (3.49)$$

Isolieren des ersten und letzten Terms:

$$s_{n+1} = s_n + s_{n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^n a_{k+1}. \quad (3.50)$$

Beispiele:

$$(i) \quad s_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{k=0}^n a^k.$$

$$s_{n+1} = s_n + a^{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^n a^{k+1} = 1 + a \sum_{k=0}^n a^k = 1 + as_n \quad (3.51)$$

$$\Rightarrow \quad s_n(1 - a) = 1 - a^{n+1}, \quad \text{bzw. } (a \neq 1) \quad s_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}. \quad (3.52)$$

Für $a = 1$ ergibt sich einfach $s_n = n + 1$.

$$(ii) \quad s_n = \sum_{k=0}^n k2^k.$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \quad s_{n+1} &= s_n + (n+1)2^{n+1} = \sum_{k=0}^n (k+1)2^{k+1} = 2 \sum_{k=0}^n k2^k + 2 \sum_{k=0}^n 2^k \\ &\stackrel{(3.52)}{=} 2s_n + 2^{n+2} - 2 \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\Rightarrow \quad s_n = (n-1)2^{n+1} + 2. \quad (3.54)$$

3.3.2 Die Methode der Differenzen

Wir betrachten die Reihe

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad (3.55)$$

und nehmen an, dass das Reihenglied a_n in der Form

$$a_k = f(k) - f(k-1) \quad (3.56)$$

dargestellt werden kann. Dann ergibt sich für die Reihensumme

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \cdots + [f(n) - f(n-1)] \\ &= f(n) - f(0), \end{aligned} \quad (3.57)$$

weil sich die Terme $f(k)$ für $1 \leq k < n$ wegheben.

Beispiel:

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}. \quad (3.58)$$

Mit

$$a_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} = f(k) - f(k-1) \quad \Rightarrow \quad f(k) = \frac{-1}{k+1} \quad (3.59)$$

$$\Rightarrow \quad s_n = f(n) - f(0) = -\frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}. \quad (3.60)$$

Die Differenzenmethode kann in einfacher Weise verallgemeinert werden. Falls

$$a_k = f(k) - f(k-m) \quad (3.61)$$

gilt, erhält man

$$s_n = \sum_{k=1}^m f(n-k+1) - \sum_{k=1}^m f(1-k). \quad (3.62)$$

Beispiel:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}. \quad (3.63)$$

Mit $a_k = -\left[\frac{1}{2(k+2)} - \frac{1}{2k}\right]$ ergibt sich:

$$a_k = f(k) - f(k-2); \quad f(k) = \frac{-1}{2(k+2)} \quad (3.64)$$

$$\Rightarrow s_n = f(n) + f(n-1) - f(0) - f(-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \right). \quad (3.65)$$

Die Differenzenmethode kann man auch zur Berechnung von $\sum_{k=1}^n k^2$ und $\sum_{k=1}^n k^3$ heranziehen. Für $s_n = \sum_{k=1}^n k^2$ erwartet man ein Polynom dritten Grades als Lösung. Wir fordern also

$$f(k) = ak^3 + bk^2 + ck \quad \text{und} \quad a_k = f(k) - f(k-1). \quad (3.66)$$

Damit ergibt sich für die Koeffizienten:

$$a = \frac{1}{3}; \quad b = \frac{1}{2}; \quad c = \frac{1}{6}, \quad (3.67)$$

und als Ergebnis für die Reihensumme

$$s_n = f(n) - f(0) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n. \quad (3.68)$$

3.4 Integralrechnung

Die Stammfunktion

Definition: Das unbestimmte Integral ist die Umkehrung der Ableitung.

$$\int dF(x) = \int \frac{dF(x)}{dx} dx = \int f(x) dx = F(x) + \alpha, \quad (3.69)$$

mit der Stammfunktion $F(x)$, dem Integranden $f(x)$, sowie der Integrationskonstanten α . Es gilt

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \quad (3.70)$$

$F(x)$ ist offenbar nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Für das *bestimmte* Integral gilt:

$$\int_a^b dF(x) = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (3.71)$$

Dies ist der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*.

Elementare Integrationstechniken

Einfache Regeln:

(i)

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (3.72)$$

(ii)

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (3.73)$$

(iii)

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (3.74)$$

(iv)

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (3.75)$$

(v)

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (3.76)$$

Variablentransformation (Substitution):

Wir betrachten das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$. Ziel ist es, das Integral in einer neuen Variablen darzustellen, so dass sich die Integration deutlich vereinfacht. Es sei t die neue Variable und es gelte $x = g(t)$. Die Funktion $g(t)$ sei im Inneren des Definitionsbereiches umkehrbar, so dass $t = g^{-1}(x)$ gelte. Notwendige Bedingung hierfür ist, dass $g'(t) \neq 0$ im Inneren gelte.

Aus dem Zusammenhang zwischen x und t ergibt sich:

$$dx = g'(t)dt; \quad x_{1,2} = g(t_{1,2}) \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = g^{-1}(x_{1,2}); \quad f(x) = f(g(t)), \quad (3.77)$$

und insgesamt

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} g'(t)f(g(t)) dt. \quad (3.78)$$

Gleichwertig ergibt sich:

$$t = h(x); \quad dt = h'(x)dx; \quad t_{1,2} = h(x_{1,2}). \quad (3.79)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{f(x = h^{-1}(t))}{h'(x = h^{-1}(t))} dt. \quad (3.80)$$

Die Variablentransformation ist eine extrem nützliche Methode, aber auch eine schwierige Methode, weil sie einige Intuition erfordert (Integration = Kunst, Kunst $\hat{=}$ Können, Können $\hat{=}$ Training).

Beispiele:

(i)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (3.81)$$

Substitution: $x = \sin(t)$; $dx = \frac{\partial x(t)}{\partial t} dt = \cos(t) dt$.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} dt = \int dt = t + \alpha \\ &= \arcsin(x) + \alpha. \end{aligned} \quad (3.82)$$

(ii)

$$\int \cos(x) \sin^2(x) dx. \quad (3.83)$$

Substitution: $t = \sin(x)$; $dt = \cos(x) dx$.

$$\rightsquigarrow \int \cos(x) \sin^2(x) dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + \alpha = \frac{1}{3} \sin^3(x) + \alpha. \quad (3.84)$$

Partielle Integration:

Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel: Mit den Funktionen $u(x)$, $v(x)$ ergibt sich:

$$d(uv) = vdu + u dv \quad \Rightarrow \quad u dv = d(uv) - v du. \quad (3.85)$$

Wenn wir diesen Ausdruck integrieren, erhalten wir

$$\int_a^b u dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (3.86)$$

Mit $u = f(x)$, $du = f'(x) dx$, $v = g(x)$ und $dv = g'(x) dx$ erhalten wir:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx. \quad (3.87)$$

Beispiele:

(i)

$$\int_a^b x \cos(x) dx = x \sin(x) \Big|_a^b - \int_a^b \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) \Big|_a^b. \quad (3.88)$$

(ii)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx \\ &= -e^{-x}(x^2 + 2x) + \int 2e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2). \quad (3.89)\end{aligned}$$

Kapitel 4

Das Lebesgue-Integral

Wir haben das Integral bislang als Umkehrung des Differentials betrachtet. Das Integral kann aber auch als Grenzfall einer Reihensumme betrachtet werden, nämlich der Summe $\sum \Delta F$.

Ein systematischer Zugang wurde von Lebesgue entwickelt. Wir stellen dazu zunächst einmal fest, dass man den Teilmengen reeller Zahlen eine Mengenfunktion zuordnen kann.

Das Intervall $I = \{x, a < x < b\}$ hat die Länge

$$L(I) = |b - a|. \quad (4.1)$$

Die Mengenfunktion ist positiv. Die Länge ändert sich durch Hinzunahme der Randpunkte nicht. Für die leere Menge gilt $L(\{\}) = 0$ und für Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen, $I = \{x, a \leq x \leq a\} = |a - a| = 0$.

Die Maße nicht überlappender Teilmengen $I_i, I_j \forall i \neq j$ sind additiv:

$$L(I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots) = L(I_1) + L(I_2) + L(I_3) + \dots \quad (4.2)$$

4.0.1 Höhere Dimensionen

Der Begriff des Maßes lässt sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Ein Maß auf \mathbb{R} hat die definierenden Eigenschaften:

1. $\mu(E)$ muss für jede Menge E im betrachteten Definitionsbereich definiert sein.
2. $\mu(E) \geq 0$.
3. $\mu(\bigcup_{i=1}^m E_i) = \sum_{i=1}^m \mu(E_i)$, falls $E_i \cap E_j = \{\}$ $\forall i \neq j$ gilt. Dies gilt insbesondere auch für Vereinigungen unendlich vieler Mengen.
4. Wenn $E_1 \subset E_2$, dann gilt $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.
5. Wenn man alle Punkte in E um den gleichen Abstand auf der reellen Achse verschiebt, so ist das Maß unverändert.
6. $\mu(E)$ bezeichnet die Intervalllänge, wenn E ein Intervall ist.

Das „Lebesgue-Maß“ einer Menge E ist die größte untere Schranke (Infimum) der Summe aller Intervalllängen derjenigen offenen Intervalle, die E enthalten. Die Intervalllänge erfüllt alle Eigenschaften eines Maßes. Mengen aus diskreten Punkten kann man auch ein Maß zuordnen, nämlich die Anzahl der Punkte in der Menge.

Wir betrachten nun wieder die Intervalllänge als Maß:

- Die Menge aller Zahlen zwischen 0 und 1 hat das Maß

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} \cap x \in [0, 1]\}) = 1 \quad (4.3)$$

- Die Menge der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 hat das Maß 0, weil sie abzählbar unendlich vielen Punkten besteht. Jeder Punkt hat hierbei das Maß 0, also ist auch das Maß der Menge

$$\mu(\{x \in \mathbb{Q} \cap x \in [0, 1]\}) = 0, \quad (4.4)$$

$$\rightarrow \mu(\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap x \in [0, 1]\}) = 1. \quad (4.5)$$

Bemerkung: Wenn eine Eigenschaft überall bis auf eine Menge vom Maß 0 gilt, spricht man davon, dass diese Eigenschaft „fast überall“ gilt.

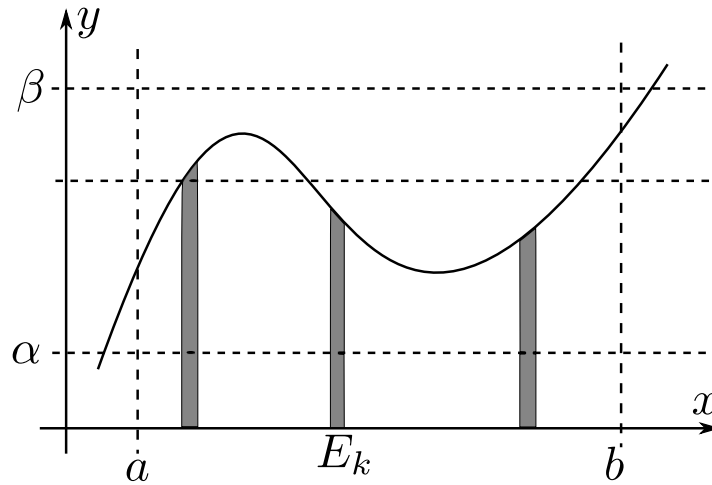
4.0.2 Messbarkeit einer Funktion $f(x)$

Definition: Eine Funktion $f(x)$ ist messbar auf einer Menge E , wenn die Menge E messbar ist und wenn für beliebige reelle Zahlen a die Menge der Punkte $x \in E$, für die $f(x) > a$ ist (also $\{x \in E | f(x) > a\}$), ebenfalls messbar ist.

Das Integral steht aber auch im Zusammenhang mit der Fläche, die unterhalb der Funktion im vorgegebenen Intervall liegt. (Dies gilt für das Integral von $\int_a^b |f(x)| dx$). Wir betrachten nun eine beschränkte Funktion, für die gilt:

$$\alpha < f(x) < \beta \quad \text{mit } a \leq x \leq b. \quad (4.6)$$

Die Funktion sei weiterhin auf dem Intervall $[a, b]$ messbar.



Wir zerlegen das Intervall $[\alpha, \beta]$ in n Teilintervalle mit

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \beta. \quad (4.7)$$

Damit definieren wir auch eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ auf der x -Achse in n Teilmengen E_k :

$$E_k := \{x \mid y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k\}. \quad (4.8)$$

Für den Wert des Integrals ergibt sich eine untere Schranke

$$s = \sum_{k=1}^n y_{k-1} \mu(E_k), \quad (4.9)$$

sowie eine obere Schranke

$$S = \sum_{k=1}^n y_k \mu(E_k). \quad (4.10)$$

Wenn wir zeigen können, dass die größte untere Schranke aller Obersummen (das Infimum $\inf(s)$) und die kleinste obere Schranke aller Untersummen (das Supremum $\sup(S)$) übereinstimmen, dann entspricht die Zahl dem Lebesgue-Integral I .

Beispiel: Wir betrachten das Integral

$$\int_a^b x dx \quad \text{mit } 0 < a < b. \quad (4.11)$$

Es bietet sich offenbar die Zerlegung $y_k = a + k\Delta$ mit $\Delta = (b - a)/n$ an. Damit

erhält man sofort $\mu(E_k) = \Delta = \text{const.}$

Für die Untersumme erhalten wir

$$s_n = \sum_{k=1}^n y_{k-1} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^n (a + (k-1)\Delta) \Delta = a\Delta n + \frac{\Delta^2}{2} n(n-1), \quad (4.12)$$

und für die Obersumme

$$S_n = \sum_{k=1}^n y_k \mu(E_k) = a\Delta n + \frac{\Delta^2}{2} n(n+1). \quad (4.13)$$

Im Limes $n \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a(b-a)n}{n} + \frac{(b-a)^2}{2n^2} n(n-1) \right] \quad (4.14)$$

$$= a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \quad (4.15)$$

Für die Obersumme ergibt sich analog $\lim_{n \rightarrow \infty} S = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. Damit existiert das Integral und hat den Wert

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \quad (4.16)$$

4.0.3 Integrationstechnik: Die Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen sind Brüche von Polynomen

$$R = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad (4.17)$$

wobei $P_n(x)$ und $Q_m(x)$ Polynome vom Grad n , respektive m , sind. Ein Polynom lässt sich in den reellen Zahlen (prinzipiell) immer auf die Form

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k = c_k \left(\prod_{i=1}^{n_1} (x - x_i) \right) \left(\prod_{j=1}^{n_2} (x^2 + p_j x + q_j) \right), \quad (4.18)$$

mit $n = 2n_2 + n_1$, bringen.

Bemerkung: In den komplexen Zahlen \mathbb{C} kann man $P_n(x)$ sogar immer in die Form $P_n(x) = c_n \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ bringen. Die Nullstellen der Polynomfunktion können aber Paare komplex konjugierter Variablen sein.

Für $n > m$ kann man eine Polynomdivision durchführen, sodass

$$R = A(x) + \frac{B(x)}{Q_m(x)} \quad (4.19)$$

gilt. $A(x)$ ist hierbei eine Polynomfunktion und lässt sich trivial integrieren. $B(x)$ ist ein Polynom vom Grad $k < m$. Wir beschränken uns daher auf den Fall $n < m$. Zunächst bringen wir den Nenner auf die Form:

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{l_2}. \quad (4.20)$$

Für jeden Faktor $(x - x_i)^{k_i}$ setzt man k_i Terme

$$\frac{a_{i_1}}{(x - x_i)} + \frac{a_{i_2}}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{a_{i_{k_i}}}{(x - x_i)^{k_i}} \quad (4.21)$$

an, und für jeden Faktor $(x^2 + p_ix + q_i)^{l_i}$ setzt man l_i Terme

$$\frac{b_{i_1}x + c_{i_1}}{(x^2 + p_ix + q_i)} + \frac{b_{i_2}x + c_{i_2}}{(x^2 + p_ix + q_i)^2} + \dots + \frac{b_{i_{l_i}}x + c_{i_{l_i}}}{(x^2 + p_ix + q_i)^{l_i}} \quad (4.22)$$

für die Partialbruchzerlegung (PBZ) an. Aus dem Ansatz $P_n(x) = Z(x)Q_m(x)$ und Koeffizientenvergleich bestimmt man dann die Konstanten der Partialbruchzerlegung.

Beispiel:

$$R(x) = \frac{-2x^3 - 2x^2 + 2x + 14}{(x + 1)^2(x^2 + 2x + 5)}. \quad (4.23)$$

Der Nenner hat offenbar schon die passende Form und es gilt weiterhin $4 = m > n = 3$. Wir machen also den Ansatz

$$Z(x) = \frac{a_0}{x + 1} + \frac{a_1}{(x + 1)^2} + \frac{b_0x + c_0}{x^2 + 2x + 5}. \quad (4.24)$$

Damit erhalten wir aus $P_n(x) = Z(x)Q_m(x)$:

$$\begin{aligned} -2x^3 - 2x^2 + 2x + 14 &= a_0(x + 1)(x^2 + 2x + 5) + a_1(x^2 + 2x + 5) \\ &\quad + (b_0x + c_0)(x + 1)^2 \\ &= (a_0 + b_0)x^3 + (3a_0 + a_1 + 2b_0 + c_0)x^2 \\ &\quad + (7a_0 + 2a_1 + b_0 + 2c_0)x + (5a_0 + 5a_1 + c_0). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$a_0 + b_0 = -2, \quad (4.26)$$

$$3a_0 + a_1 + 2b_0 + c_0 = -2, \quad (4.27)$$

$$7a_0 + 2a_1 + b_0 + 2c_0 = 2, \quad (4.28)$$

$$5a_0 + 5a_1 + c_0 = 14, \quad (4.29)$$

mit der Lösung $a_0 = 0, a_1 = 3, b_0 = -2, c_0 = 1$, so dass

$$R(x) = \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{2x+1}{x^2+2x+5}. \quad (4.30)$$

Rationale Funktionen lassen sich in dieser Form elementar integrieren. Es gilt:

$$\int dx \frac{a}{(x-x_0)^k} = \begin{cases} \frac{a}{1-n}(x-x_0)^{1-n} & \text{für } n \neq 1, \\ a \ln(x-x_0) & \text{für } n = 1, \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \int dx \frac{bx+c}{x^2+px+q} &= \frac{b}{2} \int dx \underbrace{\frac{2x+p}{x^2+px+q}}_{g'(x)} + \int dx \frac{c-\frac{pb}{2}}{x^2+px+q} \\ &= \frac{b}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2(c-\frac{pb}{2})}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan\left(\frac{2(\frac{p}{2}+x)}{\sqrt{4q-p^2}}\right). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Für $n > 2$ kann man die Beziehung

$$\int dx \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^n} = \frac{1}{1-n} \frac{\partial}{\partial q} \int dx \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^{n-1}} \quad (4.33)$$

ausnutzen.

4.0.4 Uneigentliche Integrale

Mit „uneigentlich“ werden Integrale bezeichnet, bei denen eine oder beide Integrationsgrenzen unendlich sind. Zur Berechnung von uneigentlichen Integralen, bei denen die Stammfunktion bekannt ist, kann man einfach den Grenzwert der Stammfunktion berechnen:

$$\int_1^{\infty} dx \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1. \quad (4.34)$$

Manchmal kann man uneigentliche Integrale auch durch Substitution in eigentliche Integrale überführen.

Beispiel:

$$\int_1^{\infty} dx \frac{e^{-x/(1+x)}}{(1+x)^2} \quad (4.35)$$

Mit $u = \frac{x}{1+x}$ folgt $du = \frac{\partial}{\partial x} u dx = \frac{1}{(1+x)^2} dx$. Die neuen Integrationsgrenzen sind gegeben durch $u(x=1) = \frac{1}{2}$ und $u(x=\infty) = 1$. Wir berechnen also das Integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 du e^{-u} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}. \quad (4.36)$$

4.0.5 Differentiation von Integralen

Es sei

$$F(x) = \int_a^x dt f(t) + F(a). \quad (4.37)$$

Gesucht wird die Ableitung der Funktion $F(x)$. Dazu betrachten wir zunächst den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Satz: Wenn der Integrand $f(t)$ im Integrationsintervall $t \in (x, x + \Delta x)$ stetig ist, kann das Integral durch

$$\int_x^{x+\Delta x} dt f(t) = f(x + h\Delta x)\Delta x \quad (4.38)$$

ausgedrückt werden, mit $0 \leq h \leq 1$.

Den Mittelwertsatz kann man zur Berechnung der Ableitung heranziehen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_a^{x+\Delta x} dt f(t) - \int_a^x dt f(t) \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} dt f(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + h\Delta x)\Delta x / \Delta x = f(x). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (4.39)$$

Offenbar gilt auch

$$\frac{d}{dx} \int_x^a dt f(t) = -f(x). \quad (4.40)$$

Beispiele:

$$i) \quad \frac{d}{dx} \int_{\pi/4}^x dt \sin(t) = \sin(x). \quad (4.41)$$

$$ii) \quad \frac{d}{dx} \int_0^{x^{1/n}} dt t^2 = \frac{1}{n} x^{2/n} \cdot x^{1/n-1} = \frac{1}{n} x^{3/n-1}. \quad (4.42)$$

Wenn der Integrand neben der Integrationsvariablen noch weitere Variablen aufweist, kann man Integration und Differentiation vertauschen, falls die Integrationsgrenzen nicht von dieser Variablen abhängen und f in der betreffenden und der Integrationsvariablen stetig differenzierbar ist:

$$\frac{d}{dx} \int_a^b dt f(x, t) = \int_a^b dt \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}. \quad (4.43)$$

Bemerkung: Auf der linken Seite von Gleichung (4.43) steht das Differential, weil das bestimmte Integral nur von x abhängt. Diese Technik kann zur Berechnung von Gaußintegralen genutzt werden.

Wenn auch die Integrationsgrenzen von x abhängen, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} dt f(x, t) &= \frac{d}{dx} \left[F(x, t = v(x)) - F(x, t = u(x)) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} F(x, t = v(x)) \frac{dv}{dx} - \frac{\partial}{\partial t} F(x, t = u(x)) \frac{du}{dx} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left[F(x, t = v(x)) - F(x, t = u(x)) \right] \\ &= f(x, v(x)) \frac{dv}{dx} - f(x, u(x)) \frac{du}{dx} + \int_{u(x)}^{v(x)} dt \frac{\partial}{\partial x} f(x, t). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_x^{2x} dt \frac{e^{xt}}{t} &= 2 \frac{e^{2x^2}}{2x} - \frac{e^{x^2}}{x} + \int_x^{2x} dt e^{xt} \\ &= \frac{2}{x} (e^{2x^2} - e^{x^2}). \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.1 Mehrdimensionale Integrale

Motivation: Wenn Sie ein Schiff beladen, stehen Sie vor der Aufgabe möglichst viel Fracht zu befördern, ohne dass das Schiff sinkt. Man bringt dabei Ladung einer bestimmten Dichte $\rho(x, y, z)$ an einen Ort (x, y, z) . Die Masse der Ladung ist dann die Summe der Massen der einzelnen Frachtstücke. Wenn kein Stückgut, sondern Flüssigkeiten oder Schüttgut transportiert wird, muss man statt einer Summation eine Integration in mehreren Variablen durchführen.

Eine Schwierigkeit bei der Berechnung mehrdimensionaler Integrale besteht in der Beschreibung des Integrationsgebietes, das (im obigen Beispiel der Laderaum) eine komplexe Gestalt aufweisen kann. Deshalb führen wir die charakteristische Funktion $\chi(\mathbf{r})$ ein, mit der Eigenschaft

$$\chi_A(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{r} \text{ im Integrationsbereich } A \text{ enthalten ist,} \\ 0 & \text{falls } \mathbf{r} \text{ nicht im Integrationsbereich } A \text{ enthalten ist.} \end{cases} \quad (4.46)$$

In zwei Dimensionen ergibt sich dann beispielsweise

$$\int_{\mathbb{R}^2} dA \chi_A(A) = \int_{(x,y) \in A} dx dy. \quad (4.47)$$

Die Integration in mehreren Variablen ist zunächst einmal nur eine Hintereinanderausführung mehrerer Integrationen:

$$\begin{aligned} \int dy \int dx \cos(x+y) &= \int dy \left(\int dx \cos(x+y) \right) \\ &= \int dy (\beta'(y) + \sin(x+y)) \\ &= \alpha(x) + \beta(y) + \sin(x+y). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Wir müssen also zwei Integrationskonstanten einführen, die eine Funktion der jeweils anderen Variablen sein können! Bei bestimmten Integralen können die Integralgrenzen auch von den anderen Variablen abhängen. Dies muss bei der Reihenfolge der Integration berücksichtigt werden.

Beispiel: Wir integrieren die Funktion $\rho(x, y) = 1 + x + y$ über die Fläche unter einer Parabel, also $0 < x < 2$ und $0 < y < x^2$.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 dx \int_0^{x^2} dy (1 + x + y) = \int_0^2 dx \left[y(1 + x) + \frac{1}{2}y^2 \right] \Big|_0^{x^2} \\
 &= \int_0^2 dx \left(x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5 \Big|_0^2 = \frac{148}{15}. \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

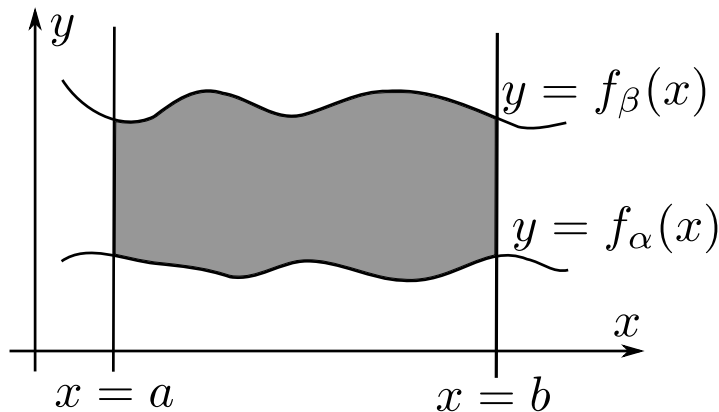
Wir wollen die Regeln nun allgemeiner formulieren:

Die Integration in mehreren Dimensionen entspricht der wiederholten Ausführung von mehreren Integrationen über jeweils eine Variable.

Die Festlegung der Integrationsgrenzen geschieht hierbei wie folgt:

- Man wählt zunächst eine Variable, über die man die letzte (bzw. äußerste) Integration durchführen möchte. Für diese Variable muss man den kleinst- bzw. größtmöglichen Wert angeben können.
- Die übrigen Integrationsgrenzen dürfen nur Variablen enthalten, die zu äußeren Integrationen gehören.
- Die Reihenfolge der Integrationen darf nur dann vertauscht werden, wenn die Integrationsgrenzen nicht von den übrigen Variablen abhängen.

Als Beispiel für eine typische Aufgabenstellung bei der mehrdimensionalen Integration betrachten wir



Das Integral von $g(x, y)$ über die Fläche A ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \int_A dA g(x, y) &= \int_a^b dx \int_{f_\alpha(x)}^{f_\beta(x)} dy g(x, y) \\ &= \int_a^b dx \left[G_y(x, f_\beta(x)) - G_y(x, f_\alpha(x)) \right], \end{aligned} \quad (4.50)$$

wobei mit $G_y(x, f_i(x))$ eine Stammfunktion zu $g(x, y)$ nach Integration über y bezeichnet wird.

Beispiel: Berechnung des Schwerpunkts einer homogenen Massenverteilung. Wir betrachten eine Platte in Form eines Halbkreises, d.h. $-R \leq x \leq R$ sowie $0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$. $\rho = \frac{M}{A} = \text{const.}$ Für die Fläche ergibt sich

$$A = \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{-R}^R dx \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (4.51)$$

Mit der Substitution $x := R \sin(t)$ ergibt sich

$$\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2(1 - \sin^2(t))} = R \cos(t), \quad (4.52)$$

$$dx = R \cos(t) dt, \quad (4.53)$$

$$t(x = -R) = \arcsin(-R/R) = -\pi/2, \quad (4.54)$$

$$t(x = R) = \arcsin(1) = \pi/2, \quad (4.55)$$

so dass insgesamt für das Integral folgt:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt R^2 \cos^2(t) = R^2 \left[\frac{1}{2} \sin(t) \cos(t) + \frac{1}{2} t \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} R^2. \quad (4.56)$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts sind gegeben durch

$$x_S = \frac{1}{M} \int_{-R}^R dx x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \rho = \frac{\rho}{M} \int_{-R}^R dx x \sqrt{R^2 - x^2} \quad (4.57)$$

$$= \frac{\rho}{M} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt R \sin(t) R^2 \cos^2(t) = 0, \quad (4.58)$$

da der Integrand ungerade ist. Für die Vertikalkomponente des Schwerpunkts ergibt sich analog:

$$y_S = \frac{\rho}{M} \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy y = \frac{\rho}{M} \int_{-R}^R dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \quad (4.59)$$

$$= \frac{\rho}{2M} \int_{-R}^R dx (R^2 - x^2) = \frac{\rho}{2M} \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-R}^R \quad (4.60)$$

$$= \frac{4}{3\pi} R. \quad (4.61)$$

Die Integration in drei Dimensionen verläuft analog:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (x^2 + y^2 + z^2) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[x^2 + y^2 \right] z + \frac{1}{3} z^3 \Big|_{z=0}^{z=1} \quad (4.62)$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \right) = \int_0^1 dx y \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=0}^{y=1} \quad (4.63)$$

$$= \int_0^1 dx \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3} x \Big|_{x=0}^{x=1} = 1 \quad (4.64)$$

Symmetrien und Variablentransformationen können die Integration erheblich vereinfachen. Ein Beispiel sind sogenannte Drehkörper, die rotationssymmetrisch um eine Drehachse sind.

Es sei die x -Achse Symmetrieachse des Körpers. Dann ist der Schnitt senkrecht zur x -Achse ein Kreis mit Radius $r(= \sqrt{x^2 + y^2}) = f(x)$. Das Volumen des Drehkörpers berechnet sich dann zu

$$V = \int_{x=a}^{x=b} dx f^2(x) \pi. \quad (4.65)$$

Damit ist das Problem auf ein eindimensionales Integral zurückgeführt.

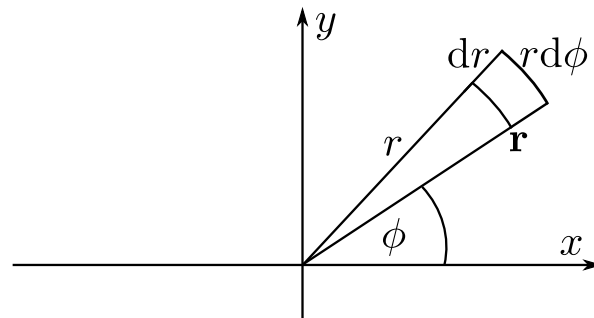
4.1.1 Variablentransformation

Eine wesentliche Vereinfachung bei der Berechnung mehrdimensionaler Integrale kann durch die Einführung von geeigneten Koordinaten, die der Symmetrie des Problems

angepasst sind, erzielt werden.

In zwei Dimensionen werden häufig Polarkoordinaten verwendet, mit

$$x = r \cos(\phi), \quad y = r \sin(\phi). \quad (4.66)$$



Auch in Polarkoordinaten muss man das infinitesimale Flächenelement bestimmen, das (bis auf Korrekturen der Ordnung $drd\phi$) die Größe $rdrd\phi$ hat.

$$\Rightarrow A = \int_A dA = \int_{(x,y) \in A} dx dy = \int_{(r,\phi) \in A} dr d\phi r. \quad (4.67)$$

In Polarkoordinaten fällt beispielsweise die Berechnung des Flächeninhalts eines (Halb-)kreises sehr leicht:

$$A = \int_0^R r dr \int_0^\pi d\phi = \int_0^R \pi r dr = \frac{1}{2} \pi r^2 \Big|_0^R = \frac{\pi}{2} R^2. \quad (4.68)$$

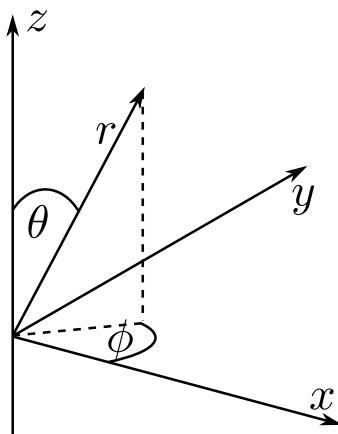
Polarkoordinaten sind bei der Berechnung von Gaußintegralen sehr nützlich. Wir betrachten:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dy \quad (4.69)$$

$$= \int_0^{\infty} r e^{-ar^2} dr \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-ar^2} dr \quad (4.70)$$

$$= -\frac{\pi}{a} e^{-ar^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (4.71)$$

Kugelkoordinaten



Kugelkoordinaten sind für radialsymmetrische Probleme die geeignete Wahl. Zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten besteht der folgende Zusammenhang:

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi), \quad (4.72)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi), \quad (4.73)$$

$$z = r \cos(\theta), \quad (4.74)$$

mit

$$r \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad (4.75)$$

sowie

$$dV = dx dy dz = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi. \quad (4.76)$$

Bemerkung: Häufig wird das Raumwinkelinkrement $d\Omega$ verwendet, da der Integrand keine explizite Abhängigkeit von den Winkeln (θ, ϕ) besitzt. Es gilt dann:

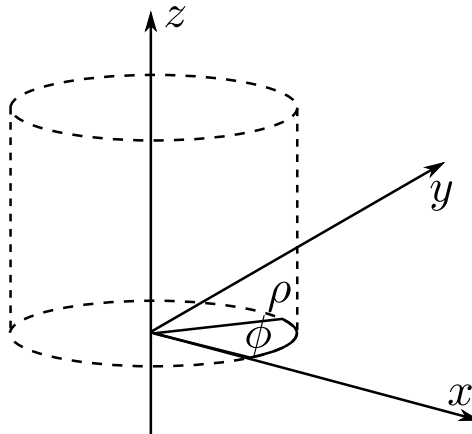
$$dV = r^2 dr d\Omega, \quad \text{mit } d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (4.77)$$

Wir berechnen exemplarisch das Volumen einer Kugel unter Zuhilfenahme der Kugelkoordinaten:

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi}{3} R^3 \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (4.78)$$

Offensichtlich vereinfacht sich die Berechnung des Kugelvolumens durch die Variablentransformation erheblich.

Zylinderkoordinaten



Bei Problemen, die eine zylindrische Symmetrie aufweisen, gilt:

$$x = \rho \cos(\phi), \quad (4.79)$$

$$y = \rho \sin(\phi), \quad (4.80)$$

$$z = z, \quad (4.81)$$

$$dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz. \quad (4.82)$$

Analog zum Kugelvolumen möchten wir nun das Volumen eines Zylinders berechnen:

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^H dz \int_0^R r \, dr = 2\pi H \frac{1}{2} R^2 = \pi R^2 H. \quad (4.83)$$

Bemerkung: Die systematische Berechnung der Volumen- und Flächenelemente werden wir im Rahmen der Vektoranalysis besprechen.

Kapitel 5

Vektoranalysis

5.1 Der Gradient

Für eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω sei ein Gebiet im \mathbb{R}^n) können wir das Differential an der Stelle $\mathbf{a} \in \Omega$ durch

$$df(\mathbf{a}) = \partial_{x_1} f(\mathbf{a}) dx_1 + \cdots + \partial_{x_n} f(\mathbf{a}) dx_n \quad (5.1)$$

ausdrücken. Eine alternative Schreibweise ergibt sich durch Einführung des *Gradienten*

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

und des Vektors

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Damit ist das Differential in der Form

$$\nabla f(\mathbf{a}) d\mathbf{x} = df(\mathbf{a}). \quad (5.4)$$

darstellbar, also als Skalarprodukt zwischen dem Gradienten und dem Vektor der Differentiale.

5.2 Raumkurven und Kurvenintegrale

Raumkurven α sind Abbildungen eines Intervalls I in den \mathbb{R}^n , also

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \rightarrow \alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_n(t) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Eine stetig differenzierbare Raumkurve nennt man regulär, wenn der Tangentenvektor $\dot{\alpha}(t)$ an keiner Stelle $t \in I$ verschwindet.

Definition: Die Bildmenge $\alpha(I)$ heißt die Spur von I .

Beispiele:

- (i) Die Archimedische Spirale

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

ist eine reguläre Kurve ($t > 0$).

- (ii) Schraubenlinie (Wendelgang im Guggenheim Museum New York):

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \\ ht \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Die Schraubenlinie ist regulär für $t \in \mathbb{R}$.

- (iii) Die Zykloide

$$t \rightarrow \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.8)$$

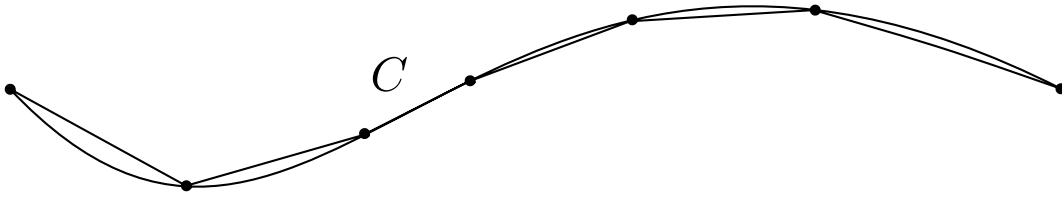
ist nicht regulär, da

$$\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.9)$$

für $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

5.2.1 Länge und Bogenlänge

Definition: Die *Länge* $L(C)$ eines Kurvenstücks ist definiert als das größte Element der in C einbeschriebenen Sehnenpolygone.



Satz: Für eine stetig differenzierbare Parametrisierung der Kurve $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$L(C) = L(\boldsymbol{\alpha}) := \int_a^b \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)\| dt. \quad (5.10)$$

Dieser Satz erlaubt die praktische Berechnung von Längen von Raumkurven.

Beispiel: Für ebene Kurven $\boldsymbol{\alpha}(t) = (t, y(t))^T$ gilt:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)\| = \sqrt{1 + \dot{y}(t)^2}, \quad (5.11)$$

und damit für die Länge der Kurve:

$$L_a^b(\boldsymbol{\alpha}) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{y}(t)^2} dt. \quad (5.12)$$

5.2.2 Skalare Kurvenintegrale

Definition: Das *skalare Kurvenintegral* bzw. *Wegintegral* von f über C wird durch

$$\int_C f ds = \int_C f(\mathbf{x}) ds := \int_a^b f(\boldsymbol{\alpha}(t)) \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)\| dt \quad (5.13)$$

definiert, wobei $ds = \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)\| dt$.

Beispiel: Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt eines kreisförmigen Drahtes mit Radius r und homogener Dichte ρ . ρ ist eine Längendichte, hat also die Dimension kgm^{-1} . Die Drahtschleife hat die Parametrisierung

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)\| = r \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = r \quad (5.14)$$

$$M = \int_C dm = \int_0^{2\pi} \rho r dt = 2\pi \rho r. \quad (5.15)$$

Für die Koordinaten des Schwerpunkts gilt:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{M} \int_C \mathbf{r} \, dm \quad \rightsquigarrow \quad x_S = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} r \cos(t) r \rho \, dt = 0 = y_S. \quad (5.16)$$

5.2.3 Vektorielle Kurvenintegrale

Definition: Unter einem Vektorfeld auf dem Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine stetige Abbildung

$$\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ v_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Sind die Komponentenfunktionen v_1, \dots, v_n zusätzlich σ -fach stetig differenzierbar (also C^σ -Funktionen), so spricht man von einem C^σ -Vektorfeld.

Beispiele:

- Geschwindigkeitsvektoren von Strömungen
- Elektrische und magnetische Felder
- Gravitationsfeld

Definition: Für ein Vektorfeld \mathbf{v} auf $\Omega \in \mathbb{R}^n$ und eine reguläre C^1 -Kurve $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ in Ω definieren wir das vektorielle Kurven- oder Wegintegral durch

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} := \int_a^b \langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}(t)), \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) \rangle dt, \quad (5.18)$$

wobei wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt bezeichnen.

Beispiel: Ein Massenpunkt im Koordinatenursprung erzeugt das Gravitationsfeld (bis auf eine Konstante)

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Wenn man einen weiteren Massenpunkt mit der Masse $m = 1$ entlang des Weges $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bewegt, so ist die dabei geleistete Arbeit gegeben durch:

$$-\int_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dt, \quad (5.20)$$

wobei $x = x(t)$ usw. gilt.

Verhalten bei Umparametrisierung

Es sei C ein stetig differenzierbares Kurvenstück in Ω und α, β zwei Parametrisierungen. Es gelte ferner $\alpha = \beta \circ h$. Dann gilt:

$$\int_{\alpha} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \begin{cases} \int_{\beta} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, & \text{falls } \dot{h} > 0, \\ - \int_{\beta} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, & \text{falls } \dot{h} < 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Eine Orientierung einer Kurve C kann dadurch festgelegt werden, dass man eine Parametrisierung β als positiv orientiert definiert. Dann ist jede Parametrisierung $\alpha = \beta \circ h$ mit $\dot{h} > 0$ ($\dot{h} < 0$) positiv (negativ) orientiert.

5.2.4 Konservative Vektorfelder und Potential

Definition: Ein Vektorfeld \mathbf{v} auf $\Omega \in \mathbb{R}^n$ heißt konservativ oder exakt, wenn das Kurvenintegral $\int_{\alpha} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$ nur von den Endpunkten abhängt, nicht aber vom Verlauf von α .

Bemerkung: Offensichtlich verschwinden Kurvenintegrale über geschlossene Kurven bei konservativen Kraftfeldern.

Satz: Ein Vektorfeld \mathbf{v} auf $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann konservativ, wenn es eine C^1 -Funktion $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\mathbf{v} = \nabla U. \quad (5.22)$$

Wir nennen U eine Stammfunktion oder ein Potential des Vektorfeldes. Es gilt

$$\int_{\alpha} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = U(\mathbf{x}_1) - U(\mathbf{x}_0), \quad (5.23)$$

wobei mit \mathbf{x}_0 der Anfangs- und mit \mathbf{x}_1 der Endpunkt von α bezeichnet wird.

Satz: Ein C^1 -Vektorfeld \mathbf{v} auf Ω besitzt ein Potential, wenn es die Integrationsbedingungen

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}, \quad \forall i \neq k \quad (5.24)$$

erfüllt und wenn Ω ein einfaches Gebiet ist.

Bemerkung: In einem einfachen Gebiet lässt sich jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen, ohne dabei Ω zu verlassen.

5.2.5 Weitere Vektoroperatoren

Definition: Für C^1 -Vektorfelder $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^\top$ auf $\Omega \in \mathbb{R}^n$ erklären wir die *Divergenz* durch

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (5.25)$$

Beispiel:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x^2 y^2 \\ y^2 z^2 \\ x^2 z^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 2(xy^2 + yz^2 + zx^2). \quad (5.26)$$

Definition: Der *Laplace-Operator* auf eine Funktion $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wobei U eine C^2 -Funktion ist, ist definiert als

$$\Delta U := \partial_x^2 U + \partial_y^2 U + \partial_z^2 U = \operatorname{div}(\nabla U) = \nabla^2 U. \quad (5.27)$$

Beispiel: Es sei $\Phi = xy^2z^3$. Damit ergibt sich

$$\Delta \Phi = \partial_x^2 \Phi + \partial_y^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi = 2xz^3 + 6xy^2z. \quad (5.28)$$

Definition: Die *Rotation* von C^1 -Vektorfeldern \mathbf{v} auf $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2 \\ \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3 \\ \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1 \end{pmatrix} = \nabla \times \mathbf{v}. \quad (5.29)$$

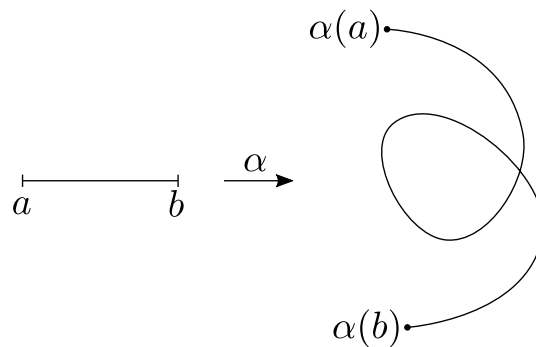
Einige nützliche Rechenregeln:

- (i) $\nabla \times \nabla U = 0$
- (ii) $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{v} = 0$
- (iii) $\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = \mathbf{v}(\nabla f) + f(\nabla \cdot \mathbf{v})$
- (iv) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v}$
- (v) $\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{w})$
- (vi) $\nabla \times (f\mathbf{v}) = f(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla f)$
- (vii) $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w}$

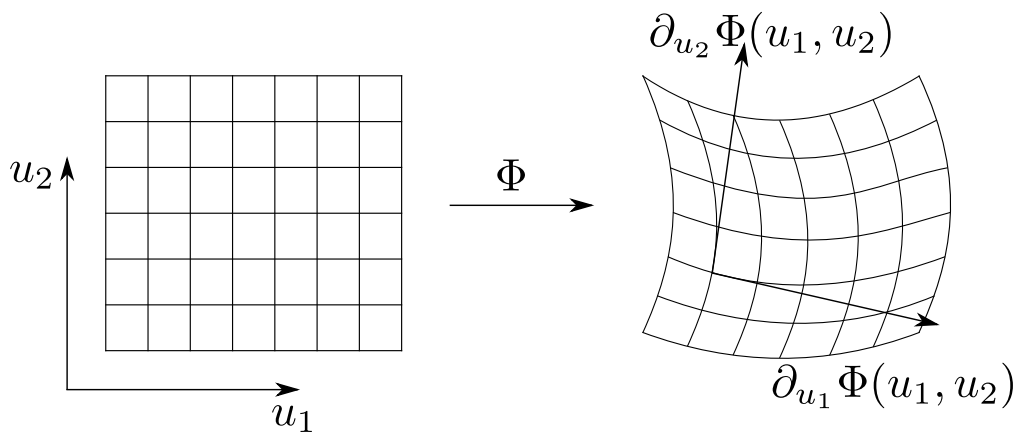
5.3 Oberflächenintegrale

5.3.1 Charakterisierung von Flächenstücken im \mathbb{R}^3

Erinnerung: Raumkurven sind Abbildungen eines Intervalls in den \mathbb{R}^n :



Analog: Flächenstücke im \mathbb{R}^3 sind Abbildungen zweidimensionaler Intervalle in den \mathbb{R}^3 :



Definition: Als *Flächenparametrisierung* bezeichnen wir eine injektive C^r -Abbildung ($r \geq 1$) auf einem Gebiet $U \in \mathbb{R}^2$, die durch

$$\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5.30)$$

gegeben ist. Es gilt also:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top \rightarrow \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{u}) \\ \Phi_2(\mathbf{u}) \\ \Phi_3(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

wobei $\partial_{u_1} \Phi(\mathbf{u})$ und $\partial_{u_2} \Phi(\mathbf{u})$ an jeder Stelle $\mathbf{u} \in U$ linear unabhängig sind. Die Vektoren

$$\partial_{u_1} \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{u})}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{u})}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \Phi_3(\mathbf{u})}{\partial u_1} \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2} \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{u})}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{u})}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \Phi_3(\mathbf{u})}{\partial u_2} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

sind *Tangentenvektoren* der Koordinatenlinien an der Stelle \mathbf{u} (siehe vorige Abbildung). Das von $\partial_{u_1} \Phi(\mathbf{u})$ und $\partial_{u_2} \Phi(\mathbf{u})$ aufgespannte Flächenelement hat offenbar nur dann eine von Null verschiedene Fläche, wenn die beiden Vektoren linear unabhängig sind.

Beispiele:

(i) Ebene:

$$(u_1, u_2) \mapsto \mathbf{a} + u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2, \quad (5.33)$$

mit $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \neq 0$, $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Obere (untere) Halbkugel:

$$(u_1, u_2) \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{R^2 - \|\mathbf{u}\|^2} \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{u}\| < R. \quad (5.34)$$

(iii) Sphäre ohne Nullmeridian:

$$(\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

mit $0 < \phi$. Der Nullmeridian muss ausgenommen werden, damit die Injektivität der Abbildung gewährleistet ist.

Definition: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt *C^r -Flächenstück* (mit $r \geq 1$), wenn sie das Bild einer C^r -Flächenparametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit stetiger Umkehrabbildung $\Phi^{-1} : M \rightarrow U$ ist. Jede solche Abbildung heißt eine (zulässige) Parametrisierung für M .

Bemerkung: Die Stetigkeit der Umkehrabbildung stellt die Orientierbarkeit sicher (Gegenbeispiel: Möbius-Band). Durch die Definition auf offenen Teilmengen stellen wir sicher, dass es keine Probleme mit der Differenzierbarkeit am Rand gibt.

Der Flächeninhalt von Flächenstücken

Für eine Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$g_{ik} := \langle \partial_i \Phi, \partial_k \Phi \rangle \quad \text{für } i, k = 1, 2, \quad (5.36)$$

sowie

$$g = \det(g_{ik}) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}. \quad (5.37)$$

Wir betrachten nun das Flächenelement $\Phi(R)$ mit dem kleinen Rechteck $R = [u_1, u_1 + \Delta u_1] \times [u_2, u_2 + \Delta u_2]$ und definieren die Vektoren $\mathbf{v}_1 = \partial_{u_1} \Phi(\mathbf{u})$ und $\mathbf{v}_2 = \partial_{u_2} \Phi(\mathbf{u})$. Das Flächenelement kann durch das Parallelogramm $\Psi(R)$ approximiert werden. Für den Flächeninhalt des Parallelogramms A_Ψ ergibt sich

$$A_\Psi = \|(\Delta u_1 \mathbf{v}_1) \times (\Delta u_2 \mathbf{v}_2)\|. \quad (5.38)$$

Wir betrachten nun:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|^2 &= \|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 \sin^2(\phi) = \|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 (1 - \cos^2(\phi)) \\ &= \|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = g(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (5.39)$$

und damit gilt:

$$A_\Psi = \|(\Delta u_1 \mathbf{v}_1) \times (\Delta u_2 \mathbf{v}_2)\| = \sqrt{g(\mathbf{u})} \Delta u_1 \Delta u_2. \quad (5.40)$$

Die Gesamtfläche $A(\Phi)$ kann näherungsweise durch die Summe von N Parallelogrammen mit den Aufpunkten $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ und den Seitenlängen Δu_1 und Δu_2 beschrieben werden:

$$A(\Phi) \simeq \sum_{k=1}^N \sqrt{g(\mathbf{u}_k)} \Delta u_1 \Delta u_2. \quad (5.41)$$

Für kleine $\Delta u_1, \Delta u_2$ wird durch die obige Summe das Integral

$$A(\Phi) := \int \sqrt{g(\mathbf{u})} \, d(u_1, u_2) \quad (5.42)$$

approximiert.

Beispiel: Sphäre mit Radius r um den Ursprung

$$S_r = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}. \quad (5.43)$$

Diese Fläche ist kein Flächenstück, da die Abbildung $\Phi(x, y, z)$ nicht injektiv ist. Wenn man den Nullmeridian ausnimmt,

$$S'_r = S_r \setminus N, \quad \text{mit } N = \{(r \cos(\theta), 0, \sin(\theta)) \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad (5.44)$$

erhält man ein Flächenstück. S'_r ist am leichtesten durch Kugelkoordinaten parametrisierbar.

$$\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad (\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad (5.45)$$

$$U = \{(\phi, \theta) \mid 0 < \phi < 2\pi; 0 < \theta < \pi\}. \quad (5.46)$$

Für die Tangentenvektoren ergibt sich

$$\partial_\phi \Phi = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_\theta \Phi = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -r \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

$$\rightsquigarrow g_{\phi\phi} = \langle \partial_\phi \Phi, \partial_\phi \Phi \rangle = r^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) = r^2 \sin^2(\theta) \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} g_{\phi\theta} &= \langle \partial_\phi \Phi, \partial_\theta \Phi \rangle = -r^2 \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ &\quad + r^2 \sin(\theta) \sin(\phi) \cos(\theta) \cos(\phi) \\ &= 0 = \langle \partial_\theta \Phi, \partial_\phi \Phi \rangle = g_{\theta\phi} \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$g_{\theta\theta} = \langle \partial_\theta \Phi, \partial_\theta \Phi \rangle = r^2 \quad (5.50)$$

$$\rightsquigarrow g = \begin{vmatrix} g_{\phi\phi} & g_{\phi\theta} \\ g_{\phi\theta} & g_{\theta\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^2 \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^4 \sin^2(\theta). \quad (5.51)$$

Für die Gesamtfläche ergibt sich dann mit (5.42):

$$A(\Phi) := \int_{S_r} \sqrt{g(\phi, \theta)} \, d\phi, d\theta = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin(\theta) \, d\theta = 4\pi r^2. \quad (5.52)$$

Oberflächenintegrale

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ ein Flächenstück und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist das skalare Oberflächenintegral von f über M durch

$$\int_M f \, dA = \int_M f(\mathbf{x}) \, dA(\mathbf{x}) := \int_U f(\Phi(\mathbf{u})) \sqrt{g(\mathbf{u})} \, du_1 \, du_2 \quad (5.53)$$

definiert, falls das Integral konvergiert.

5.3.2 Das vektorielle Oberflächenintegral

Orientierte Flächenstücke

Der von den Tangentenvektoren $\partial_{u_1} \Phi$ und $\partial_{u_2} \Phi$ einer Parametrisierung Φ aufgespannte Teilraum des \mathbb{R}^3 heißt Tangentialraum von M um den Punkt $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}) \in M$. Der Tangentialraum wird mit $T_x M$ bezeichnet.

Das Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ wird durch

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) \perp T_x M, \quad \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| = 1 \quad \text{für } \mathbf{x} \in M \quad (5.54)$$

festgelegt.

Satz: Für ein orientiertes Flächenstück M gibt es genau ein Einheitsnormalenfeld \mathbf{n} von M mit der Eigenschaft

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \pm \frac{\partial_{u_1} \Phi \times \partial_{u_2} \Phi}{\|\partial_{u_1} \Phi \times \partial_{u_2} \Phi\|}(\mathbf{u}), \quad \text{mit } \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u}). \quad (5.55)$$

Das Pluszeichen gilt für positive, das Minuszeichen für negative Parametrisierungen.

Das vektorielle Oberflächenintegral

Es sei M ein orientiertes Flächenstück und $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein auf M stetiges Vektorfeld. Dann ist das vektorielle Oberflächenintegral definiert durch

$$\int_M \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = \int_M \mathbf{v}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A}(\mathbf{u}) := \pm \int_U \langle \mathbf{v} \circ \Phi, \partial_{u_1} \Phi \times \partial_{u_2} \Phi \rangle \, du_1 \, du_2, \quad (5.56)$$

wobei $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von M ist und das Vorzeichen entsprechend der Parametrisierung gewählt wird.

Beispiel: Es sei Φ die Abbildung

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^\top \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \sqrt{a^2 - (u_1^2 + u_2^2)} \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

(obere Hemisphäre) und

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

$$\rightsquigarrow \int_M \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = \int_U \langle \mathbf{v} \circ \Phi, \partial_{u_1} \Phi \times \partial_{u_2} \Phi \rangle \, du_1 \, du_2, \quad (5.59)$$

mit

$$\partial_{u_1} \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{u_1}{z} \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2} \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{u_2}{z} \end{pmatrix}. \quad (5.60)$$

$$\rightsquigarrow \partial_{u_1} \Phi \times \partial_{u_2} \Phi = \left(\frac{u_1}{z}, -\frac{u_2}{z}, 1 \right)^\top \quad (5.61)$$

$$\rightsquigarrow \langle \mathbf{v}(\mathbf{u}), \partial_{u_1} \Phi \times \partial_{u_2} \Phi \rangle = \frac{u_1^2}{z} \quad (5.62)$$

$$\rightsquigarrow \int_U \frac{u_1^2}{\sqrt{a^2 - (u_1^2 + u_2^2)}} \, du_1 \, du_2 \stackrel{\text{Polarkoord.}}{=} \iint_{U'} \frac{r^2 \cos^2(\phi)}{\sqrt{a^2 - r^2}} r \, dr \, d\phi = \frac{2\pi a^3}{3}. \quad (5.63)$$

Beispiel: Wir betrachten das Integral über der Menge M mit

$$M = \{(x, y, z)^\top \mid x^2 + y^2 = 2z < 1\} \quad (\text{Rotationsparaboloid}). \quad (5.64)$$

Die Fläche wird parametrisiert durch

$$\Phi : (u_1, u_2) \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}(0, 0, 0) = (0, 0, -1)^\top. \quad (5.65)$$

Das Vektorfeld ist gegeben durch:

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ xyz \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{v} \circ \Phi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1^3 \\ u_1^2 u_2 \\ \frac{u_1 u_2}{2} (u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix}. \quad (5.66)$$

Der unnormierte Normalenvektor $\partial_{u_1} \Phi \times \partial_{u_2} \Phi$ ergibt sich aus:

$$\partial_{u_1} \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad \partial_{u_2} \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \partial_{u_1} \Phi \times \partial_{u_2} \Phi = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned}
 \rightsquigarrow \int_M \mathbf{v} \, d\mathbf{A} &= - \int_M \left[-u_1^4 - u_1^2 u_2^2 + \frac{u_1 u_2}{2} (u_1^2 + u_2^2) \right] du_1 du_2 \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\underbrace{r^4 \sin^4(\phi)}_{=\frac{3}{20}\pi} + \underbrace{r^4 \sin^2(\phi) \cos^2(\phi)}_{=\frac{1}{20}\pi} - \underbrace{r^4 \sin(\phi) \cos(\phi)}_{=0} \right] r \, dr \, d\phi \\
 &= \frac{\pi}{5}.
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

5.4 Integralsätze der Vektoranalysis

5.4.1 Der Integralsatz von Green

Definition: Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt

- (i) *Normalbereich* bezüglich der y -Achse, wenn B von der Gestalt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x) \quad \forall x \in [a, b]\} \tag{5.69}$$

mit gewissen stetigen Funktionen $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschrieben werden kann.

- (ii) *Normalbereich* bezüglich der x -Achse, wenn B von der Gestalt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \bar{\phi}(y) \leq x \leq \bar{\psi}(y) \quad \forall y \in [c, d]\} \tag{5.70}$$

mit gewissen stetigen Funktionen $\bar{\phi}, \bar{\psi} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschrieben werden kann.

- (iii) *Normalbereich*, wenn B sowohl ein Normalbereich bezüglich der x - als auch der y -Achse ist.

Wir wollen nun höherdimensionale Versionen des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung (3.71) herleiten.

Satz: (*Integralsatz von Green*) Seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $B \subseteq D$ ein Normalbereich, dessen Randkurve stückweise stetig differenzierbar ist. Dann gilt

$$\int_B (\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_1(x, y)) \, d(x, y) = \oint_{\partial B} f(x, y) \, d(x, y), \tag{5.71}$$

wobei der Rand ∂B in mathematisch positiver Richtung durchlaufen wird.

Beweis: Wir betrachten B zunächst als Normalbereich bezüglich der y -Achse. Dann lässt sich der Rand von B durch die Kurve

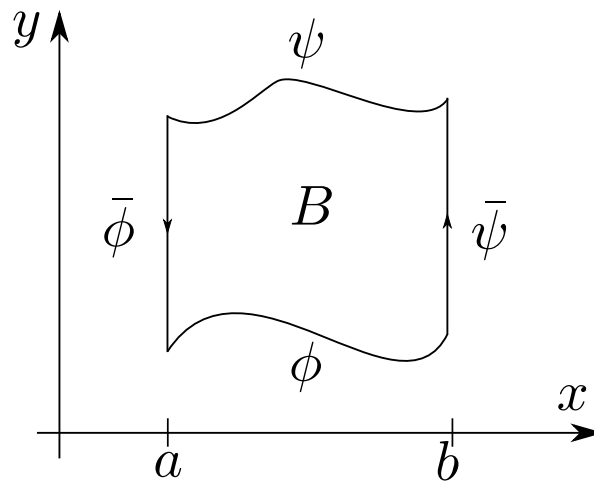
$$\gamma(t) := (x(t), y(t))^T \tag{5.72}$$

parametrisieren, mit den Komponenten

$$x(t) := \begin{cases} a + t(b - a), & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ b, & \text{falls } 1 \leq t \leq 2 \\ b - (t - 2)(b - a), & \text{falls } 2 \leq t \leq 3 \\ a, & \text{falls } 3 \leq t \leq 4 \end{cases} \quad (5.73)$$

und

$$y(t) := \begin{cases} \phi(a + t(b - a)), & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ \phi(b) + (t - 1)[\psi(b) - \phi(b)], & \text{falls } 1 \leq t \leq 2 \\ \psi(b - (t - 2)(b - a)), & \text{falls } 2 \leq t \leq 3 \\ \psi(a) - (t - 3)[\psi(a) - \phi(a)], & \text{falls } 3 \leq t \leq 4. \end{cases} \quad (5.74)$$



Wir zeigen zunächst, dass

$$\int_B \partial_y f_1(x, y) \, d(x, y) = - \int_0^4 f(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \, dt \quad (5.75)$$

gilt. Aus der Definition des Normalbereichs und dem HDI (3.71) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_B \partial_y f_1(x, y) \, d(x, y) &= \int_a^b \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \partial_y f_1(x, y) \, dy \, dx \\ &= \int_a^b [f_1(x, \psi(x)) - f_1(x, \phi(x))] \, dx. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Mit $x = x(t) = a + t(b - a)$ folgt

$$\int_a^b f_1(x, \phi(x)) \, dx = \int_0^1 f(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \, dt. \quad (5.77)$$

Mit $x = x(t) = b - (t - 2)(b - a)$ erhält man

$$- \int_a^b f_1(x, \psi(x)) \, dx = \int_2^3 f_1(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \, dt. \quad (5.78)$$

Wegen $\dot{x}(t) \equiv 0$ ergibt sich zudem für $t \in (1, 2) \cup (3, 4)$:

$$\int_1^2 f_1(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \, dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_3^4 f_1(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \, dt = 0. \quad (5.79)$$

$$\rightsquigarrow \int_a^b [f_1(x, \psi(x)) - f_1(x, \phi(x))] \, dx = - \int_0^4 f_1(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \, dt, \quad (5.80)$$

woraus die Gültigkeit von (*) folgt. Analog ergibt sich:

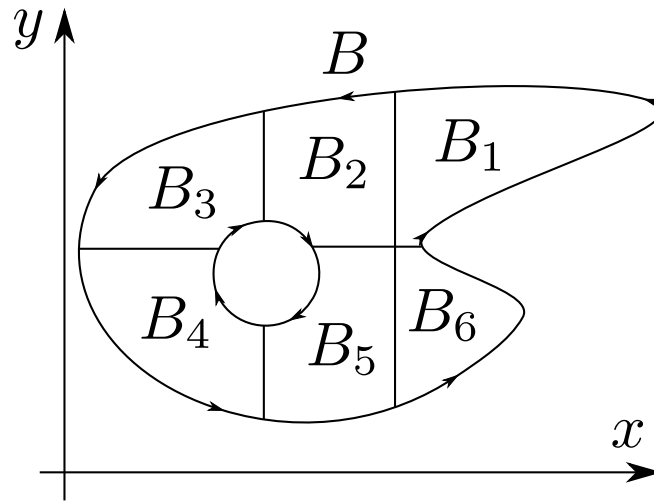
$$\int_B \partial_x f_2(x, y) \, d(x, y) = \int_0^4 f_2(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \, dt, \quad (5.81)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_B \left(\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_1(x, y) \right) \, d(x, y) &= \int_0^4 \left[f_1(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + f_2(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \right] \, dt \\ &= \int_0^4 \mathbf{f}(x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \, dt \\ &= \oint_{\partial B} f(x, y) \, d(x, y), \end{aligned} \quad (5.82)$$

und damit die Behauptung.

Bemerkung: Man kann den Greenschen Satz auch für Greensche Bereiche verallgemeinern.



Für Greensche Gebiete ergibt sich:

$$\int_B (\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_1(x, y)) d(x, y) = \sum_{i=1}^m \oint_{\partial B_i} f(x, y) d(x, y), \quad (5.83)$$

weil die „inneren“ Ränder jeweils in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und nur die Ränder übrigbleiben.

Beispiel:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \quad B = \{(x, y)^T \mid 0 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 5\}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \int_B (\partial_x f_2 - \partial_y f_1) d(x, y) &= \int_B (2x - x) d(x, y) = \int_B x dx dy = \int_2^5 dy \int_0^2 x dx \\ &= 3 \int_0^2 x dx = 6 = \oint_{\partial B} f(x, y) d(x, y). \end{aligned} \quad (5.84)$$

5.4.2 Der Integralsatz von Gauß

Satz: (*Integralsatz von Gauß*)

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $S \subseteq D$ ein Normalbereich. Dann gilt:

$$\int_S \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) dV = \int_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\Omega, \quad (5.85)$$

wobei \mathbf{n} den äußeren Normaleneinheitsvektor auf ∂S bezeichnet.

Zum Beweis nutzt man wieder die Eigenschaften des Normalbereichs aus. Wir wollen hier auf den Beweis verzichten und den Gaußschen Satz durch einige Beispiele erläutern.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{x} = 3 \\ \int_{\partial S} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_S \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = 3 \int_V dV. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Wir betrachten nun eine Kugelfläche, so dass $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = R$ und $d\Omega = R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$:

$$\int_{\partial S} R^3 \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi = 4\pi R^3 = 3 \int_S dV = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (5.87)$$

Beispiel: (Kontinuitätsgleichung)

Wir betrachten eine Dichteverteilung $\rho(\mathbf{x}, t)$ und eine Strömung $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Es gilt:

$$\partial_t M_V = \partial_t \int_S \rho(\mathbf{x}, t) \, dV = \int_S \partial_t \rho \, dV. \quad (5.88)$$

Es gilt aber auch:

$$\partial_t M_V = - \int_{\partial S} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}) \, d\Omega = - \int_S \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV \quad (5.89)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \equiv \partial_t \rho(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)). \quad (5.90)$$

5.4.3 Der Integralsatz von Stokes

Der Integralsatz von Stokes verallgemeinert den Greenschen Satz in der Ebene. Er ist auch für Flächen anwendbar, die eine endliche Krümmung haben.

Satz: (Der Integralsatz von Stokes)

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $F \subseteq D$ eine Fläche (im \mathbb{R}^3 !) mit der Parameterdarstellung (\mathbf{x}, P) und

P ein Greenscher Bereich.

Dann gilt:

$$\int_F (\operatorname{rot}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dA = \oint_{\partial F} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (5.91)$$

wobei die Kurve so durchlaufen wird, dass die Fläche links liegt, wenn man die Seite der Fläche betrachtet, aus welcher der Normalenvektor herauszeigt.

5.5 Basissysteme krummliniger Koordinaten

Wir gehen von kartesischen Koordinaten aus, die wir als Funktion anderer Koordinaten auffassen, also

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_n). \quad (5.92)$$

Man kann das Gleichungssystem nach den u_i auflösen, wenn die Funktional- oder Jacobideterminante ($n = 3$) verschieden von 0 ist.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \neq 0. \quad (5.93)$$

Die geometrische Bedeutung der Koordinaten wird durch die Kurvenscharen

$$\mathbf{r}(u_i) = \mathbf{r}(u_{10}, u_{20}, \dots, u_i, \dots, u_{n0}) \quad (5.94)$$

deutlich, wobei $u_j = u_{j0}$ mit $j \neq i$ fest ist. Wenn sich die Kurven $\mathbf{r}(u_i)$ jeweils in einem rechten Winkel schneiden, spricht man von rechtwinkligen bzw. orthogonalen Koordinaten. Wenn zwei Koordinaten parallel verlaufen, verschwindet die Jacobideterminante und die Koordinatentransformation ist nicht umkehrbar. Die Tangentenvektoren der Koordinatenlinien ergeben sich zu

$$\mathbf{e}(u_i) = \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \Bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0}, \quad \text{mit } h_{u_i} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|. \quad (5.95)$$

Für orthogonale Koordinaten im \mathbb{R}^3

$$\mathbf{e}_{u_i} \cdot \mathbf{e}_{u_j} = \delta_{ij}, \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 3. \quad (5.96)$$

Für eine rechtshändige Basis gilt weiterhin:

$$\mathbf{e}_{u_1} \times \mathbf{e}_{u_2} = \mathbf{e}_{u_3} \quad \text{und zyklisch.} \quad (5.97)$$

Sie bilden also ein orthogonales Dreibein, das aber an verschiedenen Punkten des \mathbb{R}^3 eine unterschiedliche Orientierung haben kann.

Wir wollen nun explizit die Basistransformation für Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten betrachten.

Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\phi) \\ \rho \sin(\phi) \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (5.98)$$

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

Für die Koordinatenlinien ergibt sich

$$\mathbf{r}(\rho) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\phi_0) \\ \rho \sin(\phi_0) \\ x_{30} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(\phi) = \begin{pmatrix} \rho_0 \cos(\phi) \\ \rho_0 \sin(\phi) \\ x_{30} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(x_3) = \begin{pmatrix} \rho_0 \cos(\phi_0) \\ \rho_0 \sin(\phi_0) \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (5.99)$$

Für die entsprechenden Einheitsvektoren ergibt sich

$$\frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\rho \quad (h_\rho = 1), \quad (5.100)$$

$$\frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -r \sin(\phi) \\ r \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_\phi \quad (h_\phi = r), \quad (5.101)$$

$$\frac{1}{h_{x_3}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_{x_3} \quad (h_{x_3} = 1). \quad (5.102)$$

$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_{x_3}$ bilden ein Rechtssystem. Analog ergeben sich für

Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\phi) \sin(\theta) \\ r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.103)$$

die Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (h_r = 1), \quad (5.104)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (h_\theta = r), \quad (5.105)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (h_\phi = r \sin(\theta)). \quad (5.106)$$

Die Reihenfolge für das Rechtssystem ist

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi. \quad (5.107)$$

Ziel der Einführung krummliniger Koordinaten ist es, Vektoren in dieser neuen Basis zu bestimmen. Die Komponente eines Vektors in Richtung des Basisvektors ist gegeben durch

$$F_{u_i} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_{u_i}. \quad (5.108)$$

Hierbei werden \mathbf{F} und \mathbf{e}_{u_i} in den neuen Koordinaten ausgedrückt.

Beispiel: Der Vektor

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix} = \mathbf{F} \quad (5.109)$$

hat in der neuen Basis die Komponenten

$$F_r = r \sin^2(\theta) \cos^2(\phi) + r \sin^2(\theta) \sin^2(\phi) + r \cos^2(\theta) = r \quad (5.110)$$

$$F_\theta = r \sin(\theta) \cos(\theta) (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) - r \sin(\theta) \cos(\theta) = 0 \quad (5.111)$$

$$F_\phi = r \sin(\theta) (\cos(\phi)(-\sin(\phi)) + \sin(\phi) \cos(\phi)) = 0 \quad (5.112)$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{r} = r \mathbf{e}_r. \quad (5.113)$$

Es ist notwendig, auch die Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten zu betrachten:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\sum_{i=1}^n F_{u_i} \mathbf{e}_{u_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F_{u_i}}{\partial u_j} \mathbf{e}_{u_i} + F_{u_i} \frac{\partial \mathbf{e}_{u_i}}{\partial u_j} \right). \quad (5.114)$$

Konkret ergibt sich für den Gradienten:

$$\begin{aligned} (\nabla \phi)_{u_i} &= \nabla \phi(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots) \mathbf{e}_{u_i} \\ &= \nabla \phi(u_1, \dots, u_n) \cdot \left(\frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right) \\ &= \frac{1}{h_{u_i}} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \right) = \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \phi}{\partial u_i}, \end{aligned} \quad (5.115)$$

und damit insgesamt

$$\nabla = \sum_i \mathbf{e}_{u_i} \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial}{\partial u_i}. \quad (5.116)$$

Für die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(u_1, u_2, u_3) = & \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \left[\partial_{u_1} (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) + \partial_{u_2} (h_{u_1} h_{u_3} A_{u_2}) \right. \\ & \left. + \partial_{u_3} (h_{u_1} h_{u_2} A_{u_3}) \right] \quad (A_{u_i} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{u_i}), \end{aligned} \quad (5.117)$$

und für die Rotation:

$$\nabla \times \mathbf{A}(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \begin{vmatrix} h_{u_1} \mathbf{e}_{u_1} & h_{u_2} \mathbf{e}_{u_2} & h_{u_3} \mathbf{e}_{u_3} \\ \partial_{u_1} & \partial_{u_2} & \partial_{u_3} \\ h_{u_1} A_1 & h_{u_2} A_2 & h_{u_3} A_3 \end{vmatrix}. \quad (5.118)$$

Schließlich ergibt sich für den Laplace-Operator (für allgemeine orthogonale Koordinaten):

$$\begin{aligned} \Delta \phi(u_1, u_2, u_3) = & \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_1}} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_{u_1} h_{u_3}}{h_{u_2}} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_{u_1} h_{u_2}}{h_{u_3}} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Kapitel 6

Gewöhnliche Differentialgleichungen

6.1 Gewöhnliche DGL erster Ordnung

Wir betrachten DGLen der Form:

$$y'(x) = f(x, y), \quad x, y \in D \subset \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen (Satz von Picard)

Die obige Differentialgleichung hat für die Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{mit } x_0, y_0 \in D \quad (6.2)$$

eine eindeutige Lösung, wenn $f(x, y)$ und $\partial_y f(x, y)$ in D stetig sind.

Beispiel:

Die DGL $y' = x\sqrt{y}$, $D = \{x \in \mathbb{R}, y \leq 0\}$ hat die Lösungen $y = 0$ und $y = x^4/16$. Dies ist mit dem Satz von Picard vereinbar, da $\partial_y f(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ für $y = 0$ nicht stetig ist.

6.1.1 Lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten gewöhnliche Differentialgleichungen vom Typ

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x). \quad (6.3)$$

1. Fall: $a(x) = 0$

Diese DGL beschreibt ein einfaches Integral

$$y'(x) = b(x) \quad (6.4)$$

mit der Lösung

$$y(x) = \int b(x) dx + \alpha. \quad (6.5)$$

Die Integrationskonstante α wird durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

Beispiel:

Wir betrachten die DGL

$$y'(x) = e^{2x}, \quad \text{mit } y(0) = -1. \quad (6.6)$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung ist gegeben durch

$$y(x) = \int e^{2x} dx + \alpha = \frac{1}{2}e^{2x} + \alpha. \quad (6.7)$$

Mit $y(0) = \frac{1}{2} + \alpha = -1$ ergibt sich $\alpha = -\frac{3}{2}$.

2. Fall: $b(x) = 0$

Die Differentialgleichung

$$y'(x) = a(x)y(x), \quad \text{bzw.} \quad y'(x) - a(x)y(x) = 0 \quad (6.8)$$

wird als *homogene lineare DGL erster Ordnung* bezeichnet.

Die Lösung der homogenen Gleichung ergibt sich zu:

$$y(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x a(u) du\right), \quad \text{mit } y_0 = y(x_0), \quad (6.9)$$

wie wir leicht berechnen können. Offensichtlich ist die DGL eine DGL vom Typ getrennter Veränderlicher:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y(x), \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{y(x)} \frac{dy}{dx} = a(x); \quad y(x) \neq 0. \quad (6.10)$$

Mit der Ersetzung $x = u$ ergibt sich:

$$\int_{x_0}^x \frac{dy}{du} \frac{1}{y} du = \int_{y_0}^y \frac{1}{y} dy = \int_{x_0}^x a(u) du, \quad (6.11)$$

woraus das obige Ergebnis folgt.

Die Lösung ist unter der Voraussetzung, dass $a(x)$ auf dem betrachteten Intervall

von x stetig ist, eindeutig. Eine explizite Lösung der DGL erhält man offensichtlich, wenn man das Integral

$$\int a(u) du \quad (6.12)$$

berechnen kann.

Beispiel:

$$\begin{aligned} y'(x) = \frac{1}{x}y(x) \quad \rightsquigarrow \quad y(x) &= y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{1}{u} du\right) \\ &= y_0 \exp\left[\ln(x) - \ln(x_0)\right] = \frac{y_0}{x_0}x. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ein alternativer Weg zur Lösung der DGL ist ein sogenannter *integrierender Faktor*. Dazu multiplizieren wir die DGL auf beiden Seiten mit der Funktion $g(x) = \exp(-A(x))$:

$$y'g(x) = a(x)yg(x). \quad (6.14)$$

Mit $g'(x) = -A'(x)\exp(-A(x))$ folgt für $A'(x) = a(x)$:

$$y'g(x) - a(x)g(x)y = 0 = \underbrace{y'g(x) + g'(x)y}_{(yg(x))'} \quad (6.15)$$

$$\rightsquigarrow \quad yg(x) = y_0, \quad \text{bzw.} \quad y(x) = y_0 \exp(-A(x)). \quad (6.16)$$

3. Fall: Die inhomogene lineare DGL erster Ordnung

Die Lösung der DGL

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad (6.17)$$

erhält man durch *Variation der Konstanten*. Wir machen den Ansatz:

$$y(x) = \beta(x) \exp\left(\int_{x_0}^x a(u) du\right), \quad \text{mit } \beta(x_0) = y_0. \quad (6.18)$$

Mit $A(x) = \int_{x_0}^x a(u) du$ erhalten wir:

$$y' = \beta'e^A + A'\beta e^A = a(x)\beta e^A + b(x). \quad (6.19)$$

Wegen $A'(x) = a(x)$ muss $\beta(x)$ die DGL

$$\frac{d\beta(x)}{dx} = b(x)e^{-A(x)} \quad (6.20)$$

erfüllen, die die Lösung

$$\beta(x) = y_0 + \int_{x_0}^x b(s)e^{-A(s)} ds \quad (6.21)$$

besitzt. Die Gesamtlösung lautet also:

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^x b(s)e^{-A(s)} ds. \quad (6.22)$$

Beispiel:

Wir betrachten die inhomogene DGL

$$y'(x) = \frac{4}{x}y + x^5 e^x. \quad (6.23)$$

Zunächst müssen wir $A(x)$ bestimmen:

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(u) du = \int_{x_0}^x \frac{4}{u} du = \ln(x^4) - \ln(x_0^4). \quad (6.24)$$

Damit lautet die Lösung der homogenen DGL:

$$y_h = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^4 = y_0 e^{A(x)}. \quad (6.25)$$

Damit ergibt sich weiter:

$$e^{A(x)} \int_{x_0}^x s^5 e^s \frac{x_0^4}{s^4} ds = x^4 \int_{x_0}^x s e^s ds = x^4 \left([xe^x - x_0 e^{x_0}] - e^x + e^{x_0} \right), \quad (6.26)$$

und insgesamt:

$$y(x) = x^5 e^x + x^4 \left(\frac{y_0}{x_0^4} + e^{x_0} (1 - x_0) - e^x \right). \quad (6.27)$$

Wir fassen zusammen:

- Lineare DGL erster Ordnung lassen sich explizit lösen.

- Für stetige Funktionen $a(x)$ existiert eine Lösung und sie ist für eine sogenannte Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ eindeutig.

6.1.2 Nichtlineare DGL

Für nichtlineare DGL kann man selbst für gewöhnliche DGL erster Ordnung kein allgemeines Lösungsschema angeben. Wir werden im Folgenden einige wichtige Beispiele nichtlinearer DGL erster Ordnung ansprechen, für die man die Lösungen der DGL angeben kann.

Getrennte Veränderliche

Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = a(x)b(y). \quad (6.28)$$

Die homogene lineare DGL ist ein Spezialfall dieser DGL. Die Gleichung hat die formale Lösung

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{b(s)} ds = \int_{x_0}^x a(t) dt. \quad (6.29)$$

Wenn man die Integrale auf beiden Seiten berechnen kann und zusätzlich die Gleichung nach y auflösen kann, kann man eine explizite Lösung der Gleichung angeben.

Bemerkung: Bei der Herleitung der Lösung hatten wir $b(y) \neq 0$ gefordert. Dies gilt insbesondere auch für die lineare homogene DGL erster Ordnung, deren Lösung aber auch für $y = 0$ gültig ist. Für nichtlineare DGL gilt analog:

Wenn $b(y_0) = 0$ eine isolierte Nullstelle ist und $b(y)$ stetig differenzierbar im Definitionsbereich ist, dann ist $y(x) = y_0$ die einzige Lösung des Anfangswertproblems.

Beispiel:

$$y' = x(1 + y^2); \quad y(-\sqrt{2\pi}) = 1; \quad D \subset \mathbb{R}^2$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{1}{1 + s^2} ds = \int u du \quad (6.30)$$

$$\Rightarrow \arctan(y) = \frac{x^2}{2} + \alpha \quad (6.31)$$

$$\Rightarrow \arctan(1) = \pi + \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{3\pi}{4}. \quad (6.32)$$

Damit ergibt sich

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3\pi}{4}\right). \quad (6.33)$$

Die Lösung gilt aber nur für einen Zweig der $\tan(\cdot)$ -Funktion, also den Zweig mit $-\frac{\pi}{2} < \frac{x^2}{2} - \frac{3\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, wegen der Singularitäten bei $(n + \frac{1}{2})\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

6.1.3 Die Bernoulli-Gleichung

Die DGL der Form

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (6.34)$$

wird Bernoulli-Gleichung genannt. Für $\alpha = 0, 1$ ist die DGL eine gewöhnliche lineare DGL erster Ordnung. Für allgemeine Werte von α kann man die Gleichung auf eine lineare DGL zurückführen.

Dazu multiplizieren wir die obige Gleichung mit $y^{-\alpha}$ ($y \neq 0$):

$$\rightsquigarrow y'y^{-\alpha} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x). \quad (6.35)$$

Mit der Substitution $z = y^{1-\alpha}$ folgt: $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$ und

$$\frac{z'}{1 - \alpha} = a(x)z + b(x) \quad (6.36)$$

$$\Rightarrow z' = (1 - \alpha)a(x)z + b(x), \quad (6.37)$$

also eine gewöhnliche inhomogene DGL erster Ordnung.

Homogener Typ

Homogene Funktionen haben die Eigenschaft

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \quad (6.38)$$

mit dem Grad n der homogenen Funktion.

Beispiel:

$$f(x, y) = x^n + x^m y^{n-m}, \quad m < n \quad (6.39)$$

$$\rightsquigarrow \begin{aligned} f(tx, ty) &= t^n x^n + t^m x^m t^{n-m} y^{n-m} \\ &= t^n (x^n + x^m y^{n-m}) = t^n f(x, y). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Eine DGL $y' = f(x, y)$ ist vom homogenen Typ, falls $f(x, y)$ eine homogene Funktion vom Grad 0 ist. Mit der Substitution $u = \frac{y}{x}$ erhalten wir:

$$y = ux \quad (6.41)$$

$$\Rightarrow y'(x) = u'x + u \quad (6.42)$$

$$\rightsquigarrow f(x, y) = f(x, ux) = x^0 f(1, u) = f(1, u) \quad (6.43)$$

$$\Rightarrow y'(x) = u'x + u = f(1, u) \quad (6.44)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} (f(1, u) - u), \quad (6.45)$$

also eine DGL vom Typ getrennter Veränderlicher.

6.2 Gewöhnliche DGL höherer Ordnung

Eine *lineare DGL der Ordnung n* hat die Form

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) y^{(k)}(x) = b(x), \quad (6.46)$$

wobei mit $y^{(k)}(x)$ die k -te Ableitung der Funktion $y(x)$ bezeichnet wird. Das Anfangswertproblem (6.46) mit

$$a_n(x) \neq 0, \quad a_k(x), b(x) \text{ stetig}$$

und den n Anfangsbedingungen

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (6.47)$$

hat eine eindeutige Lösung.

6.2.1 Konstante Koeffizienten

Die einfachste DGL höherer Ordnung ist eine lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = 0. \quad (6.48)$$

Die Gleichung hat zwei linear unabhängige Lösungen $y_{1,2}(x)$, so dass die allgemeine Lösung durch

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (6.49)$$

gegeben ist. Zur Lösung der linearen Gleichung machen wir den Ansatz $y(x) = A \exp(\lambda x)$, der auf eine Lösung der Form

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (6.50)$$

führt. Wenn wir den Ansatz in die DGL einsetzen, erhalten wir

$$\lambda^2 y(x) + \alpha \lambda y(x) + \beta y(x) = 0. \quad (6.51)$$

Nichttriviale Lösungen der DGL erhalten wir, falls

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \beta = 0, \quad (6.52)$$

also für

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}. \quad (6.53)$$

Wir können nun verschiedene Fälle unterscheiden.

1. Fall: $\frac{\alpha^2}{4} - \beta > 0$

In diesem Fall ist die Lösung reell und gegeben durch

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (6.54)$$

Die Konstanten $c_{1,2}$ werden aus den Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y'_0$ bestimmt.

2. Fall: $\frac{\alpha^2}{4} - \beta < 0$

Die Lösungen sind komplex, d.h. es treten $\sin(\cdot)$ - und $\cos(\cdot)$ -Terme auf.

3. Fall: $\frac{\alpha^2}{4} - \beta = 0$

In diesem Fall ist $\lambda = -\frac{\alpha}{2}$ zweifache Nullstelle des Polynoms. Wir erweitern dann unseren Ansatz durch

$$y(x) = x e^{\lambda x} \quad (6.55)$$

$$\rightsquigarrow y'(x) = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} = e^{\lambda x} + \lambda y(x) \quad (6.56)$$

$$\rightsquigarrow y''(x) = \lambda e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x} = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 y(x) \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow e^{\lambda x}(2\lambda + \alpha) + y(x)(\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) \\ &= e^{\lambda x} \left(-\frac{\alpha}{2} 2 + \alpha \right) + y(x) \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^2}{4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Damit lautet die allgemeine Lösung für zweifache Nullstellen

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}. \quad (6.59)$$

Wir können gewöhnliche DGL n -ter Ordnung in ein System von Gleichungen n -ter Ordnung umformulieren. Gegeben sei die DGL

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (6.60)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.61)$$

Die Transformation

$$y_1 \equiv y; \quad y_k \equiv y^{(k-1)}, \quad k = 2, \dots, n \quad (6.62)$$

führt auf das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

In vektorieller Form lautet das System

$$\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y}); \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \quad (6.63)$$

Bemerkung: Wenn $f(\cdot)$ nicht explizit von x abhängt, spricht man von einem autonomen System.

Für ein lineares System wird die obige Gleichung zu einer einfachen Vektorgleichung

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + B. \quad (6.64)$$

Für den Fall konstanter Koeffizienten erhalten wir im homogenen Fall

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \quad (6.65)$$

mit der $n \times n$ -Matrix A . Mit dem Ansatz

$$\mathbf{y}_i(x) = e^{\lambda_i x} \mathbf{u}_i \quad (6.66)$$

erhalten wir

$$\lambda_i e^{\lambda_i x} \mathbf{u}_i = A e^{\lambda_i x} \mathbf{u}_i \quad (6.67)$$

Diese Gleichung führt also auf das Eigenwertproblem

$$A\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i. \quad (6.68)$$

Durch die Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren wird das System von Differentialgleichungen gelöst, mit der Lösung

$$y_i(x) = e^{\lambda_i x} \mathbf{u}_i. \quad (6.69)$$

Falls der Eigenwert λ_i entartet ist, kann man analog zur linearen DGL höherer Ordnung weitere linear unabhängige Lösungen durch

$$\mathbf{y}_j = x \mathbf{y}_i(x) + e^{\lambda_i x} \mathbf{v} = e^{\lambda_i x} (x \mathbf{u}_i + \mathbf{v}) \quad (6.70)$$

konstruieren.

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_j &= (e^{\lambda_i x} + \lambda_i x e^{\lambda_i x}) \mathbf{u}_i + \lambda_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v} \\ &= A x e^{\lambda_i x} \mathbf{u}_i + A \mathbf{v} e^{\lambda_i x} \end{aligned} \quad (6.71)$$

$$\rightsquigarrow e^{\lambda_i x} \mathbf{u} + \lambda_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v} = A \mathbf{v} e^{\lambda_i x}. \quad (6.72)$$

Damit ergibt sich die lineare Gleichung

$$(A - \lambda_i \mathbb{1}) \mathbf{v} = \mathbf{u}_i, \quad (6.73)$$

die wegen $\det(A - \lambda_i \mathbb{1}) = 0$ eine nichttriviale Lösung besitzt. Der Lösungsansatz lässt sich für k -fach entartete Eigenwerte verallgemeinern. Mit der Ersetzung $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_0$ und $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ erhalten wir

$$y_{i+k}(x) = e^{\lambda_i x} \sum_{n=0}^k (x^{k-n} \mathbf{v}_k) \quad (6.74)$$

für die weiteren Lösungen der DGL zum Eigenwert λ_i . Die Lösung des Gesamtsystems ist dann insgesamt gegeben durch

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}_i(x). \quad (6.75)$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus der Anfangsbedingung $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$.

Beispiel: Wir betrachten die DGL

$$y'' - 2y' + y = 0. \quad (6.76)$$

Mit den Ersetzungen $y' = y_2$ und $y = y_1$ ergibt sich

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \quad (6.77)$$

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ hat wegen

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad (6.78)$$

den zweifach entarteten Eigenwert $\lambda = 1$. Ein Eigenwert ist gegeben durch $\mathbf{y}_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die zweite linear unabhängige Lösung ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow -v_1 + v_2 = 1 \rightsquigarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (6.79)$$

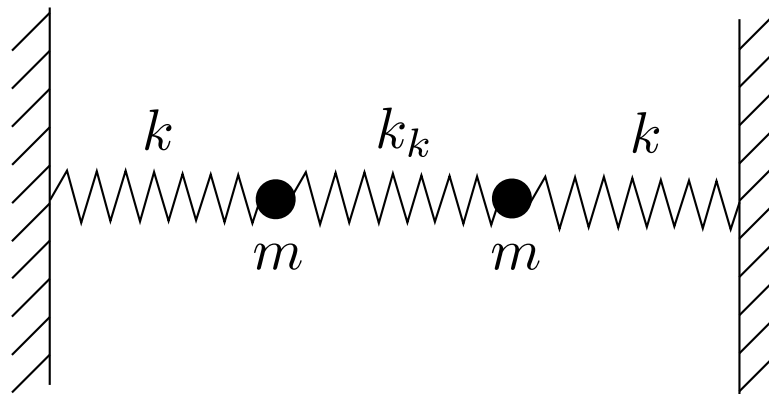
Insgesamt erhalten wir dann:

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right). \quad (6.80)$$

Vergleiche: $y_1(x) = (c_1 + c_2 x + c_2) e^x = (\tilde{c} + c_2 x) e^x$.

Beispiel: Gekoppelte Oszillatoren

Wir betrachten ein System zweier gekoppelter Oszillatoren.



Die Bewegungsgleichungen der beiden Massen ergeben sich zu

$$m\ddot{x}_1 = F_1 + F_{1k} = -kx_1 + k_k(x_2 - x_1) \quad (6.81)$$

$$m\ddot{x}_2 = F_2 + F_{2k} = -kx_2 + k_k(x_1 - x_2). \quad (6.82)$$

Zur Lösung des Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung setzen wir den Ansatz an:

$$x_1(t) = A_1 e^{\lambda t} \quad (6.83)$$

$$x_2(t) = A_2 e^{\lambda t}. \quad (6.84)$$

Wir erhalten $\ddot{x}_i(t) = A_i \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 x_i(t)$, und somit das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} m\lambda^2 + k + k_k & -k_k \\ -k_k & m\lambda^2 + k + k_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \equiv M \mathbf{A}. \quad (6.85)$$

Nichttriviale Lösungen erhält man, falls $\det(M) = 0$ gilt, bzw.

$$(m\lambda^2 + k + k_k)^2 - k_k^2 = 0 \quad (6.86)$$

$$\Rightarrow m\lambda^2 + k + k_k = \pm k_k \quad (6.87)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = (\pm k_k - k - k_k)/m \quad (6.88)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2}^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} =: \pm i\omega_1 \quad (6.89)$$

$$\Rightarrow \lambda_{3,4}^2 = -\frac{k + 2k_k}{m} \Rightarrow \lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{k + 2k_k}{m}} =: \pm i\omega_2. \quad (6.90)$$

Einsetzen der λ_i in die Gleichung (6.85) ergibt:

$$(i) \quad x_1(t) = A_1 e^{i\omega_1 t} = x_2(t)$$

$$(ii) \quad x_1(t) = A_1 e^{-i\omega_1 t} = x_2(t)$$

$$(iii) \quad x_1(t) = -x_2(t) = A_1 e^{i\omega_2 t}$$

$$(iv) \quad x_1(t) = -x_2(t) = A_1 e^{-i\omega_2 t}.$$

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination der vier Lösungen (bestimmt durch Anfangsbedingungen).

6.3 Green-Funktionen

Wir betrachten die lineare DGL

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x). \quad (6.91)$$

Mit der Abkürzung

$$\mathcal{L}y(x) := a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0y(x) \quad (6.92)$$

ergibt sich:

$$\mathcal{L}y(x) = f(x). \quad (6.93)$$

Wir nehmen nun an, dass die Funktion $\mathcal{G}(x, z)$, die allgemeine Lösung der obigen DGL ist, existiert. Die Funktion erfüllt die Randbedingung im Intervall $a \leq x \leq b$. Damit gilt:

$$y(x) = \int_a^b \mathcal{G}(x, z) f(z) dz \quad (6.94)$$

und

$$\mathcal{L}y(x) = \int_a^b [\mathcal{L}\mathcal{G}(x, z)] f(z) dz = f(x). \quad (6.95)$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(x, z) = \delta(x - z) \quad (6.96)$$

gilt. Damit muss die Green-Funktion die ursprüngliche DGL erfüllen, allerdings mit der Inhomogenität $\delta(x - z)$ anstelle von $f(x)$. Wir müssen nun die Randbedingungen genauer betrachten. Für Werte a, b, \dots , für die die Funktion $y(x)$ und/oder ihre Ableitungen verschwinden, sollte auch $\mathcal{G}(a, z) = \mathcal{G}(b, z) = 0$ bzw. analog für die Ableitungen von $\mathcal{G}(x, z)$ an den betreffenden Nullstellen.

Dann muss man sich noch mit der Stetigkeit von $\mathcal{G}(x, z)$ beschäftigen. Es gilt offenbar:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} a_m(x) \underbrace{\frac{\partial^m \mathcal{G}(x, z)}{\partial x^m}}_{\mathcal{L}\mathcal{G}(x, z) = \delta(x-z)} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} \delta(x - z) dx = 1. \quad (6.97)$$

Da $\partial_x^n \mathcal{G}(x, z)$ an der Stelle $x = z$ existiert (allerdings mit dem Wert ∞), muss die $(n-1)$ -te Ableitung eine endliche Diskontinuität aufweisen und alle übrigen Ableitungen kontinuierlich sein. In der Reihensumme verschwinden offenbar alle Beiträge für $m < n$. Damit können wir aber auch die Diskontinuität bestimmen, denn

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} a_n(x) \partial_x^n \mathcal{G}(x, z) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \left[a_n(x) \partial_x^{n-1} \mathcal{G}(x, z) \right]_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} \\ &\quad - \underbrace{\int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} a'_n(x) \partial_x^{n-1} \mathcal{G}(x, z) dx}_{=0} = 1 \end{aligned} \quad (6.98)$$

$\rightsquigarrow \partial_x^{n-1} \mathcal{G}(x, z)$ hat eine Sprungstelle mit der Amplitude $\frac{1}{a_n(z)}$.

Damit muss die Green-Funktion folgende Eigenschaften erfüllen:

- (i) $\mathcal{G}(x, z)$ erfüllt die DGL $\mathcal{L}\mathcal{G}(x, z) = \delta(x - z)$.
- (ii) Wenn man $\mathcal{G}(x, z)$ als Funktion von x auffasst, erfüllt sich die Randbedingung für $y(x)$.
- (iii) Die Ableitungen $\partial_x^m \mathcal{G}(x, z)$ sind kontinuierlich für $m < n - 1$. $\partial_x^{n-1} \mathcal{G}(x, z)$ hat eine Diskontinuität mit der Amplitude $a_n^{-1}(z)$ an der Stelle $x = z$.

Beispiel:

$$y'(x) + y(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad y(0) = y(\pi/2) = 0. \quad (6.99)$$

- (i) Wir lösen diese DGL mit der Methode der Green-Funktion, die die DGL

$$\partial_x^2 \mathcal{G}(x, z) + \mathcal{G}(x, z) = \delta(x - z) \quad (6.100)$$

erfüllen muss. Für $x \neq z$ ist die obige DGL homogen, so dass

$$\mathcal{G}(x, z) = \begin{cases} A(z) \sin(x) + B(z) \cos(x) & x < z, \\ C(z) \sin(x) + D(z) \cos(x) & x > z. \end{cases} \quad (6.101)$$

Damit ist die erste Bedingung für $\mathcal{G}(x, z)$ erfüllt.

- (ii) Randbedingungen: $\mathcal{G}(0, z) = \mathcal{G}(\pi/2, z)$, $(0 < z < \pi/2)$.

$$\rightsquigarrow B(z) = C(z) = 0. \quad (6.102)$$

- (iii) (Dis-)Kontinuität für $x = z$:

$$\mathcal{G}(x, z) : \quad A(z) \sin(z) - D(z) \cos(z) = 0 \quad (6.103)$$

$$1. \text{ Ableitung : } \quad -A(z) \cos(z) - D(z) \sin(z) = 1. \quad (6.104)$$

Die obigen Gleichungen sind erfüllt für

$$A(z) = -\cos(z), \quad D(z) = -\sin(z). \quad (6.105)$$

Insgesamt erhalten wir also für die Green-Funktion

$$\mathcal{G}(x, z) = \begin{cases} -\cos(z) \sin(x), & x < z \\ -\sin(z) \cos(x), & x > z. \end{cases} \quad (6.106)$$

(iv) Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{G}(x, z) \frac{1}{\sin(z)} dz = -\cos(x) \int_0^x \sin(z) \frac{1}{\sin(z)} dz \\
 &\quad - \sin(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cot(z) dz = -x \cos(x) + \sin(x) \ln(\sin(x)). \quad (6.107)
 \end{aligned}$$

Damit haben wir die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL konstruiert. Der Vorteil der Green-Funktion besteht darin, dass wir für gegebenes \mathcal{L} und gegebene Randbedingungen die allgemeine Lösung $y(x)$ auch für andere Inhomogenitäten $f(x)$ einfach aus Schritt (iv) erhalten, also

$$y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{G}(x, z) f(z) dz. \quad (6.108)$$

Bemerkung: Die Green-Funktion hängt von den Randbedingungen ab!

Beispiel: Wenn man $y(0) = y'(0)$ als Randbedingung für den obigen Operator \mathcal{L} wählt, erhält man

$$\mathcal{G}(x, z) = \begin{cases} 0, & x < z \\ \sin(x - z), & x > z. \end{cases} \quad (6.109)$$

Bislang haben wir homogene Randbedingungen betrachtet. Für inhomogene Randbedingungen müssen wir eine Substitution

$$u = y - h(x) \quad (6.110)$$

durchführen, wobei $h(x)$ ein Polynom $(n - 1)$ -ter Ordnung ist, welches die Randbedingungen erfüllt.

Eine weitere wichtige Methode zur Lösung gewöhnlicher DGL sind Potenzreihenansätze.

Wir betrachten hierzu die DGL

$$y'' + \alpha(x)y' + \beta(x)y = 0. \quad (6.111)$$

Wenn die Funktionen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ am Punkt x_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden können, dann gibt es zwei linear unabhängige Lösungen für $y(x)$, die ebenfalls als Potenzreihe darstellbar sind, also

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \quad (6.112)$$

Die Koeffizienten a_n lassen sich dadurch bestimmen, dass die Vorfaktoren für alle Potenzen von $(x - x_0)$ verschwinden müssen.

Beispiel:

$$y'' - 2xy = 0. \quad (6.113)$$

In diesem Fall gilt $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = -2x$. Damit sind beide Funktionen bereits Potenzreihen um $x_0 = 0$.

Damit gilt:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \rightsquigarrow \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (6.114)$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \quad (6.115)$$

Einsetzen in obige DGL ergibt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0. \quad (6.116)$$

Wir müssen nun die Potenzen ordnen:

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+2)(n-1) - 2a_{n-1} \right] x^n = 0. \quad (6.117)$$

Damit erhalten wir:

$$a_2 = 0 \quad (6.118)$$

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n-1}}{(n+2)(n-1)}. \quad (6.119)$$

Die Koeffizienten sind alle bis auf a_0 und a_1 bestimmt. Die beiden Koeffizienten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Wir erhalten die linear unabhängigen Lösungen

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{45} + \dots \right] \quad (6.120)$$

$$y_2(x) = a_1 \left[y + \frac{x^4}{6} + \frac{x^7}{126} + \dots \right]. \quad (6.121)$$

