Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
M.Sc. M. Schöndorf (Mail: marius@lusi.uni-sb.de)
M.Sc. E. Maikranz (Mail: e.maikranz@lusi.uni-sb.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 09.11.2018

Übungsblatt 4 zur Theoretischen Physik I+II für Lehramtskandidaten, WS2018

Aufgabe 1 *Mechanische Ähnlichkeit + Virialsatz* [$2 + 4 = 6$ Punkte]

Im folgenden sei das Potential U eine homogene Funktion vom Grade k der Koordinaten (i.e. $U(\alpha \mathbf{r}_1, \ldots, \alpha \mathbf{r}_N) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$). Wir betrachten die Transformation:

$$\mathbf{r}_i' = \alpha \mathbf{r}_i$$
$$t' = \beta t$$

a) Berechnen Sie das Laufzeitverhältnis $\frac{t'}{t}$ von Teilchen mit verschiedenen Massen längs geometrisch ähnlicher Bahnen (i.e. selbe Bewegungsgleichung nur in $\mathbf{r}_i'$ und $\mathbf{r}_i$ Koordinaten).

b) Bestimmen Sie nun für die nachfolgenden Situationen den Grad des Potentials und die damit verbundenen Laufzeitverhältnisse. Gehen Sie von gleich schweren Massen aus. Geben Sie sofern möglich die mittlere kinetische und potentielle Energie in Abhängigkeit der Gesamtenergie an.

   i) Ein homogenes Kraftfeld wie z.B. im freien Fall.
   ii) Ein lineares Kraftfeld wie z.B. im Fall einer hookschen Feder.
   iii) Das Gravitationsfeld zweier Massen.
   iv) Ein Potential für zwei Teilchen mit $\frac{1}{|\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}|^2}$

   Bemerkung: Die Potentiale sind in i) und ii) für eine beliebige Teilchenzahl anzugeben. Nur im Fall iii) und iv) dürfen Sie von nur zwei Teilchen ausgehen.

Aufgabe 2 *Eindimensionale Bewegung* [2 Punkte]

Bestimmen Sie die Periodendauer T der Oszillationen eines Körpers der Masse m im Potential

$$U(x) = A|x|^n$$

als Funktion der Gesamtenergie E. Verwenden Sie die Eulersche Betafunktion

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t$$

um eine besser Darstellung des resultierenden Integrals zu finden.

Aufgabe 3 *Zentralpotential* [$1+2+1+1+1=6$ Punkte]

Für einen Körper der Masse m im Zentralpotential $U(r)$ ist die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten durch

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\Theta) + r^2\dot{\Theta}^2\right) - U(r)$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Energie und den Impuls in φ Richtung explizit und begründen Sie dass diese erhalten sind.

b) Man kann aus a) folgern das der Drehimpuls erhalten sein muss. Nutzen sie dies um zu zeigen dass die Bewegung nur in einer Ebene stattfindet und wählen Sie Θ, sodass diese der x-y Ebene entspricht. Eliminieren Sie außerdem $\dot{\varphi}$ um eine Lagrangefunktion zu erhalten, die nur von r und $\dot{r}$ abhängt.

   Wie lautet das effektive Potential U_{eff} der so erhaltenen Lagrangefunktion?

c) Bestimmen Sie die implizite Bahngleichung $\varphi(r)$.

   Hinweis: Nutzen Sie die Energieerhaltung und die Bewegungsgleichung für r

d) Gegeben sei ein Zentralpotential der Form

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$$

   mit $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.
   Für welche Werte von n existieren stabile gebundene Bahnkurven?

e) Wir nehmen an, dass die Bahnkurve eines Körpers eine logarithmische Spirale

$$r(\varphi(t)) = ae^{b\varphi(t)}$$

   beschreibt. Wie lautet das zugehörige Potential $U(r)$ in dem sich der Körper bewegt?

Aufgabe 4 *Quadratisches Zentralpotential* [$2+2+1=5$ Punkte]

Wir betrachten das Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$$

a) Zeigen Sie, dass sich die Lösung der Bewegungsgleichungen in der Form

$$\varphi = \pm\frac{\mathcal{L}_z}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r'}\frac{1}{\sqrt{Er'^2-\kappa}}\mathrm{d}r' + \varphi(r_0)$$

   mit $\kappa = \frac{\mathcal{L}}{2m} - \alpha$ schreiben lässt. Das Vorzeichen hängt davon ab ob Sie sich auf den Ursprung zu oder wegbewegen. Bestimmen Sie weiterhin die explizite Form von $\varphi(r)$.

b) Aus Aufgabe 3 wissen Sie das keine stabilen gebundenen Bahnen existieren können. Begründen Sie für die nachfolgenden Fälle um welche Art der Bewegung es sich handelt und skizzieren Sie diese.

   i) $E > 0$, $\kappa > 0$
   ii) $E > 0$, $\kappa < 0$
   iii) $E < 0$, $\kappa < 0$

   Hinweis: Sie müssen dafür nicht Aufgabe a) gelöst haben.

   Bestimmen Sie außerdem den minimalen Abstand.

c) Geben Sie für Bahnkurven bei denen das Teilchen von einem festen Winkel aus kommend am Ursprung gestreut und sich dann gegen $r \to \infty$ bewegt den Grenzwinkel φ_∞ an.