Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
M.Sc. M. Schöndorf (Mail: marius@lusi.uni-sb.de)
M.Sc. E. Maikranz (Mail: e.maikranz@lusi.uni-sb.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 16.11.2018

Übungsblatt 5 zur Theoretischen Physik I+II für Lehramtskandidaten, WS2018

Aufgabe 1 *Gleitendes Pendel* [$1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 8$ Punkte]

Wir betrachten ein gleitendes Pendel (siehe Abbildung 1) im homogenen Schwerefeld der Erde.

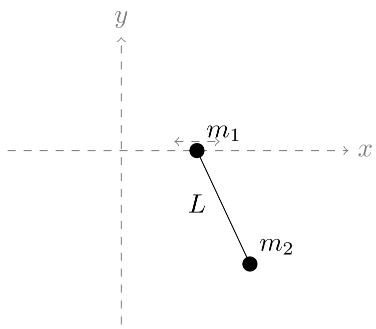

Abbildung 1

a) Was sind geeignete verallgemeinerten Koordinaten zur Beschreibung des gleitenden Pendels?

b) Berechnen Sie die Lagrangefunktion.

c) Welche Symmetrien liegen vor und welche Erhaltungsgrößen folgen daraus?

d) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

e) Nutzen Sie die Erhaltungsgrößen und vereinfachen Sie die Bewegungsgleichungen.

Aufgabe 2 *Das Keplerproblem* [$2 + 1 + 1 + 4 + 3 + 3 = 14$ Punkte]

Das Keplerproblem beschreibt ein System von zwei Punktmassen mit Massen m_1,m_2 deren einzige Wechselwirkung die Gravitation ist. Damit ergibt sich die Lagrangefunktion zu:

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}}_2^2 + G\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

a) Überführen Sie das Zweikörperproblem in ein Einkörperproblem indem Sie Schwerpunkts- und Relativkoordinaten mit reduzierter Masse μ einführen und zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion aus zwei unabhängige Summanden schreiben lässt.

b) Aus Blatt 4 wissen Sie bereits, dass die Bewegung in einem Zentralpotential in einer Ebene stattfindet. Wir wählen Polarkoordinaten sodass, diese in der ebenen genannten Ebene liegen. Bestimmen Sie die implizite Bahngleichung $\varphi(r)$.

c) Folgern Sie die Bahngleichung $r(\varphi) = \frac{r_0}{1-\epsilon\cos\varphi}$ mit $r_0 = \frac{\mathcal{L}_z^2}{\mu G m_1 m_2}, \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\mathcal{L}_z^2}{\mu(G m_1 m_2)^2}}$
Hinweis: Dazu müssen Sie am Ende den Winkel um eine Konstante verschieben. Die Winkel in Aufgabe b) und c) werden demnach leicht anders gemessen.

d) Führen Sie kartesische Koordinaten ein und zeigen Sie, dass die Bahnen je nach Parameter Kreise, Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln sind. Diskutieren Sie außerdem welche Bahnformen in Abhängigkeit des Parameters ϵ vorliegen. Geben Sie zudem deren Charakteristika wieder (e.g. bei Elliptischen Bahnen die Halbachsen).

e) Zeigen Sie die Keplerschen Gesetze. Nehmen Sie dazu an das einer der Körper, welchen wir Sonne nennen, viel Schwerer als der andere Körper, welchen wir Planet nennen, ist.

   i) Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

   ii) Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

   iii) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben (dritten Potenzen) der großen Bahnhalbachsen.

f) Es gibt im Keplerproblem neben der Energie und dem Drehimpuls eine weitere Erhaltungsgröße. Diese Erhaltungsgröße ist der sogenannte Laplace-Lenz-Runge Vektor $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathcal{L} - \mu\alpha\mathbf{e}_r$.

   i) Berechnen Sie $\mathbf{A}$ explizit. Sie werden sehen das $\mathbf{A}$ in der Ebene der Bewegung liegt.

   ii) Bestimmen Sie α sodass der Laplace-Lenz-Runge Vektor wirklich eine Erhaltungsgröße ist.

   iii) Leiten Sie mittels der Erhaltung des Laplace-Lenz-Runge Vektors die Bahngleichung her. Wählen Sie dafür den Polarwinkel, sodass $\mathbf{A}$ anti-parallel zu x-Achse zeigt.