Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
M.Sc. M. Schöndorf (Mail: marius@lusi.uni-sb.de)
M.Sc. E. Maikranz (Mail: e.maikranz@lusi.uni-sb.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 30.11.2018

Übungsblatt 7 zur Theoretischen Physik I+II für Lehramtskandidaten, WS2018

Aufgabe 1 *Rayleighsche Dissipationsfunktion* $[1+2+1=4$ Punkte$]$

Bisher haben wir uns nur mit Systemen beschäftigt, die Reibungsfrei sind. In dieser Aufgabe wollen wir Reibungskräfte in den Lagrange Formalismus einführen. Wir betrachten dazu ein System mit N Teilchen, deren Orte in kartesischen Koordinaten durch $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1,\dots,N}$ gegeben seien. Weiterhin betrachten wir einen Satz von generalisierten Koordinaten $\{q_i, \dot{q}_i\}_{i=1,\dots,f}$, sowie generalisierten Reibungskräfte, welche in verallgemeinerten Koordinaten die Darstellung

$$Q_j^{(R)} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{R}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \tag{1}$$

besitzen. $\mathbf{R}_i$ bezeichne dabei die Reibungskraft auf Teilchen i in kartesischen Koordinaten. Den zweiten Faktor erhält man durch Transformation in generalisieren Koordinaten. Mit diesen generalisierten Reibungskräften nehmen die Euler-Lagrange-Gleichungen die Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{(R)}$$

an.

a) Beweisen Sie $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$

   Hinweis: Verwenden Sie die Kettenregel.

b) Da es sich um Reibungskräfte handelt, sind diese der Geschwindigkeit entgegen gerichtet. Wir nehmen an das Sie in der Form

$$\mathbf{R}_i = -R_i\left(\dot{\mathbf{r}}_i\right)\frac{\dot{\mathbf{r}}_i}{|\dot{\mathbf{r}}_i|}$$

   geschrieben werden können. Wir definieren im weiteren $\dot{r}_i := |\dot{\mathbf{r}}_i|$.

   Die Rayleighsche Dissipationsfunktion ist durch

$$P = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\dot{r}_i} R_i\left(\dot{r}_i'\right) \mathrm{d}\dot{r}_i'$$

   gegeben. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichungen auch als

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

geschrieben werden können.

Warnung: Da die Anzahl an Freiheitsgrade f nicht unbedingt $3N$ betragen muss, können Zwangsbedingungen vorliegen, welche die Koordinaten voneinander abhängig machen.

c) Im Fall einer zeitunabhängigen Lagrangefunktion (explizite Zeitabhängigkeit) ist die Größe

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$$

erhalten. Berechnen Sie nun im Fall von Reibung die zeitliche Änderung dieser Größe und geben Sie diese in Abhängigkeit von P an.

Aufgabe 2 *Greensche Funktion des harmonischen Oszillators* $[2+2+1=5$ Punkte$]$

Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Inhomogenität $f(t)$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

Wir betrachten nun den Spezialfall einer punktförmigen Störung zum Zeitpunkt t' sodass $f(t) = \delta(t-t')$ gilt. $\delta(t-t')$ ist die sogenannte Delta-Distribution die Sie im Vorlesungsteil über die Elektrodynamik noch öfter sehen werden. An dieser Stelle brauchen Sie nur das

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t-t'\right) f\left(t'\right) dt' = f(t)$$

gilt. Die Lösung der Differentialgleichung mit punktförmiger Störung nennt man Greensche Funktion.

a) Um die Greensche Funktion zu bestimmen fouriertransformieren wir die Differentialgleichung. Zeigen Sie dazu dass

$$F\left[\frac{d^n}{dt^n}x\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n x}{dt^n} e^{-ikt} dt = (ik)^n F[x]$$

gilt und zeigen Sie damit das für die Greensche Funktion

$$F[G] = \frac{e^{-ikt'}}{\omega^2 + 2\lambda ik - k^2}$$

erfüllt sein muss.

b) Die Rücktransformation der Fouriertransformation $F^{-1}[x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(k)\, e^{ikt} \mathrm{d}k$ erfüllt

$$F^{-1}[F[x]] = x(t)$$

(daher der Name Rücktransformation). Man beachte das $x(k)$ die Fouriertransformation von $x(t)$ sein soll und damit insbesondere nicht die selbe Funktion nur mit einem anderen Argument ist.

Wie lautet damit die Greensche Funktion ?

Hinweis: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(t-t')}}{k^2 - 2\lambda ik - \omega^2} dk = 2\pi e^{-\lambda(t-t')} \begin{cases} -\frac{\sin\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}(t-t')\right)}{\sqrt{\omega^2-\lambda^2}} & \text{für } \lambda \neq \omega, t > t' \\ -(t-t') & \text{für } \lambda = \omega, t > t' \\ 0 & \text{für } t \leq t' \end{cases}$$

c) Außer dass die Greensche Funktkion eine partikuläre Lösung für eine punktförmige Anregung liefert, kann mit ihr eine geschlossene Formel für eine partikuläre Lösung bei beliebiger Inhomogenität angeben werden. Zeigen Sie das

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t'\right) G\left(t-t'\right) dt'$$

eine partikuläre Lösung für den getrieben harmonischen Oszillator mit beliebiger Störung ist.

Aufgabe 3 *Corioliskraft* [1 + 2 = 3 Punkte]

Bestimmen Sie, für kleine Winkelgeschwindigkeiten $\mathbf{\Omega}$, die Ablenkung eines auf der Nordhalbkugel freien fallenden Körpers von der Vertikalen infolge der Erdrotation. Des weiteren soll folgendes gelten:

- Die anfängliche Höhe h sei klein gegenüber dem Erdradius R, sodass sich das Gravitationspotential durch $U = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ approximieren lässt ($\mathbf{g}$ ist dabei die Erdbeschleunigung).
- Da wir von kleinen Winkelgeschwindigkeiten ausgehen wollen vernachlässigen Sie alle Terme die quadratisch in der der Winkelgeschwindigkeit sind. Dazu gehört insbesondere die Zentrifugalkraft.

a) Zeigen Sie, dass für die Bewegungsgleichung im rotierenden Bezugssystem $\dot{\mathbf{v}} = 2\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega} + \mathbf{g}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für die Ablenkung

$$\Delta y = \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} g \; \Omega \cos\lambda$$

gilt (λ Breitengrad).
Wird der Körper nach Osten oder Westen abgelenkt?

Hinweis: Nehmen Sie eine Anfangshöhe von h und Anfangsgeschwindigkeiten von Null an. Das rotierenden Bezugssystem sei so gewählt das die z-Achse senkrecht auf der Oberfläche steht. Die x-Achse zeige tangential Richtung Südpol und die y-Achse in Richtung Osten.