Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
M.Sc. M. Schöndorf (Mail: marius@lusi.uni-sb.de)
M.Sc. E. Maikranz (Mail: e.maikranz@lusi.uni-sb.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 21.12.2018

Übungsblatt 10 zur Theoretischen Physik I+II für Lehramtskandidaten, WS2018

Aufgabe 1 *Poisson-Klammer* $[0,5+0,5+1+0,5+0,5+0,5+0,5+1,5+0,5 = 6$ Punkte$]$

Für zwei Observable f, g definiert man die Poisson-Klammer $[\cdot,\cdot]$ durch

$$[f,g] = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

Zeigen Sie:

a) $\frac{df}{dt} = [f,H] + \frac{\partial f}{\partial t}$

b) $\dot{q}_i = [q_i, H]$, $\dot{p}_i = [p_i, H]$

c) $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$, $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}$

d) Linearität: $[C_1 f + C_2 g, h] = C_1 [f,g] + C_2 [g,h]$

e) Antisymmetrie: $[f,g] = -[g,f]$

f) Existenz der Null: $[C_1, f] = 0$

g) Produktregel: $[fg, h] = f[g,h] + [f,h]\,g$

h) Jacobi-Identität: $[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$

i) f,g$=$ const $\Rightarrow$ $[f,g]$ $=$const
   Hinweis: Verwenden Sie die Jacobi-Identität und den Satz von Schwarz.

Dabei sind C_1, C_2 beliebige Konstanten, h eine weitere Observable und H die Hamiltonfunktion.

Bemerkung: Die Eigenschaften der Bilinearität (Linearität in beiden Argumenten, folgt aus d zusammen mit e), der Jacobi-Idendität sowie $[f,f] = 0$ (folgt aus e) machen die Poisson-Klammer zu einer sogenannten Lie-Klammer.

Aufgabe 2 *Vektoranalysis* [$1+1+1=3$ Punkte]

Zeigen Sie für ein hinreichend differenzierbares Vektorfeld F und ein hinreichend differenzierbares Skalarfeld f:

a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

b) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

c) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$

Hinweis: Schreiben Sie das Kreuzprodukt mithilfe des Levi-Civita Symbols und verwenden Sie den Satz von Schwarz. Außerdem wird die mit Einsteinscher Summenkonvention geschriebene Identität $\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ nützlich sein.

Aufgabe 3 *Delta-Distribution* [$2+2+2=6$ Punkte]

Die sogenannte Delta-Distribution, welche sich durch

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x) = \begin{cases} f(0) & , a \leq 0 \leq b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

auszeichnen soll ($a \leq b$), kann nicht als gewöhnliche Funktion verstanden werden. Jedoch kann sie als Grenzwert einer Funktionenfolge verstanden werden, sodass

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^b f(x)\,\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} f(0) & , a \leq 0 \leq b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

gilt ($a \leq b$). Für $\delta_\epsilon(x)$ kommen mehrere Funktionenfolgen in Frage.

a) Zeigen Sie, dass

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & , |x| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

die gewünschte Eigenschaft hat.
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

b) Da wir nun verstehen was mit der Symbolik gemeint ist, zeigen Sie folgende Relationen ohne die explizite Darstellung aus a) zu verwenden

i) ($a \leq b$)

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} f(y) & , a \leq y \leq b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

ii) $\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x)\frac{d}{dx}$

c) In drei Dimensionen verallgemeinert man die Delta-Distribution, sodass $\delta(\mathbf{r}) = C(\mathbf{q})\,\delta(q_1)\,\delta(q_2)\,\delta(q_3)$ gilt. Die q_i sind beliebige Koordinaten und C eine Funktion die von den gewählten Koordinaten abhängt, welche so bestimmt werden muss dass für jedes beliebiges Volumen $\int_V \delta(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} = 1$ gilt.

i) Bestimmen Sie $\delta(\mathbf{r})$ in Kugelkoordinaten.

ii) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{x^2+y^2+z^2\leq R^2} \sin\left(\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right) e^{-(x^2+y^2+z^2)}\delta\left(\mathbf{x}-a\hat{e}_x\right)\mathrm{d}^3\mathbf{x}$$

$(a \geq 0)$
$\mathbf{x}$ steht für den Ortsvektor in kartesischen Koordinaten.

iii) Transformieren Sie $\delta\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-a\right)$ in Kugelkoordinaten

iv) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{x^2+y^2+z^2\leq R^2} \sin\left(\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right) e^{-(x^2+y^2+z^2)}\delta\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-a\right)\mathrm{d}^3\mathbf{x}$$

$(a \geq 0)$

Aufgabe 4 *Singularitäten* $[2+3=5$ Punkte$]$

a) Für welche Werte von n stimmen das Oberflächenintegral $\int \mathbf{F}\mathrm{d}^2\mathbf{r}$ und das Volumenintegral $\int \nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}^3\mathbf{r}$ mit Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \frac{-1}{(x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}\begin{pmatrix} y+x \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix}$$

überein. Die Integrationsbereiche seien dabei das Volumen bzw. die Oberfläche eines entlang der z-Achse orientierten Zylinders der Länge L und Radius R.

b) i) Berechnen Sie

   i. $\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$

   ii. $\Delta_{\mathbf{r}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$

   ii) Berechnen Sie $\int_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\mathrm{d}^2\mathbf{r}$ und betrachten Sie anschließend den Satz von Gauß rückwärts. Was ist seltsam am Ergebnis?