



Übungsblatt 8 zur Theoretischen Physik I+II für Lehramtskandidaten, WS2018

Aufgabe 1 *Symmetrischer Schwerer Kreisel* [3 + 2 + 1 + 4 = 10 Punkte]

Wir betrachten einen symmetrischen Kreisel, welcher am Unterstützungspunkt fixiert ist, unter dem Einfluss des homogenen Schwerfeldes der Erde .

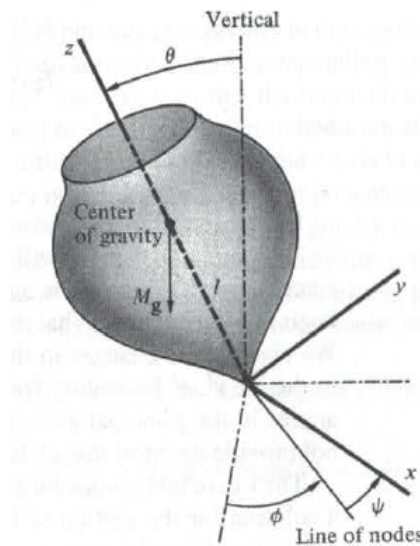


Abbildung 1: Schwerer Kreisel im homogenen Schwerfeld der Erde mit Eulerwinkeln

- a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion im Hauptachsensystems des Trägheitstensors als

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \Theta + \dot{\Theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \Theta + \dot{\psi})^2 - Mgh \cos \Theta$$

geschrieben werden kann. Dafür wurde der Unterstützungspunkt als Koordinatenursprung gewählt. Die Winkel ϕ, Θ, ψ bezeichnen die Eulerwinkel.

Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung der Winkelgeschwindigkeit mittels der Eulerwinkel.

- b) Berechnen Sie die verallgemeinerten Impulse, welche Konstanten der Bewegung darstellen und schreiben Sie damit die verschobene Energie $E' = E - \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{I_3}$ als

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\Theta}^2 + V(\Theta)$$

Die Funktion $V(\Theta)$ ist ein effektives Potential und von Ihnen zu bestimmen. Warum ist E' eine Erhaltungsgröße?

c) Zeigen Sie dass

$$t(\Theta) = \pm \sqrt{\frac{I_1}{2}} \int \frac{1}{\sqrt{E' - V(\Theta)}} d\Theta + C \quad (1)$$

gilt, wobei C eine Konstante ist

d) Gleichung 1 lässt sich formal invertieren und ermöglicht damit prinzipiell die Lösung der Bewegungsgleichungen. Sie ist jedoch nicht analytisch lösbar. Wir wollen deswegen, analog zum Kepler-Problem, die möglichen Lösungen qualitativ untersuchen.

i) Welche Fälle in Abhängigkeit von E und $V(\Theta)$ müsste man prinzipiell untersuchen?

ii) Untersucht man die in i) angesprochenen Fälle sieht man dass eine stabile Rotation des Kreisels möglich ist (Θ ist konstant). Bestimmen Sie eine implizite Gleichung für den Winkel Θ bei dem eine stabile Rotation möglich ist.

Hinweis: Sie erhalten eine quadratische Gleichung in $p_\phi - p_\psi \cos \Theta$ die Sie lösen müssen. Sie müssen dazu i) nicht bearbeitet haben.

iii) Leiten Sie aus ii) ab welche Winkelgeschwindigkeit ω_3 überschreiten muss, sodass es zu besagter stabiler Rotation kommt. Folgern Sie außerdem die beiden möglichen Rotationsgeschwindigkeiten.