Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
M.Sc. M. Schöndorf (Mail: marius@lusi.uni-sb.de)
M.Sc. E. Maikranz (Mail: e.maikranz@lusi.uni-sb.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 18.01.2019

Übungsblatt 12 zur Theoretischen Physik I+II für Lehramtskandidaten, WS2018

Aufgabe 1 *Vektoridentitäten* $[1,5+1,5=3$ Punkte$]$

Zeigen Sie unter Verwendung des Levi-Civita Symbols für zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$:

a)

$$\nabla\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)=\left(\mathbf{a}\times\nabla\right)\times\mathbf{b}+\left(\mathbf{b}\times\nabla\right)\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\left(\nabla\cdot\mathbf{b}\right)+\mathbf{b}\left(\nabla\cdot\mathbf{a}\right)$$

b)

$$\nabla\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)=\mathbf{a}\times\left(\nabla\times\mathbf{b}\right)+\mathbf{b}\times\left(\nabla\times\mathbf{a}\right)+\left(\mathbf{a}\cdot\nabla\right)\mathbf{b}+\left(\mathbf{b}\cdot\nabla\right)\mathbf{a}$$

Aufgabe 2 *Mechanik eines freien geladenen Teilchens* [3 Punkte]

Die Lagrangefunktion eines freien geladenen Teilchens (in cgs Einheiten) mit Ladung q in einem äußeren elektrischen und magnetischen Feld mit Vektorpotential $\mathbf{A}$ sowie Skalarpotential Φ ist

$$L\left(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t\right)=\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2+\frac{q}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}-q\Phi\left(\mathbf{r},t\right)\ .$$

Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen und bestimmen Sie die wirkende Kraft in Abhängigkeit des elektrischen und magnetischen Feldes.
Hinweis: Für die Identifizierung benötigen Sie einer der Identitäten aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3 *Maxwellscher-Spannungstensor* $[3+2+4=9$ Punkte$]$

Es sei eine homogen geladenen Kugel mit Radius R und Gesamtladung Q gegeben.

a) Berechnen sie das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte auf und innerhalb der Kugel.

b) Berechnen Sie den Maxwellschen-Spannungstensor auf der Nordhalbkugel und auf der Trennfläche zwischen Süd- und Nordhalbkugel. Das Ergebnis auf der Nordhalbkugel ist

$$\hat{\mathbf{T}}=\frac{Q^2}{4\pi R^4}\begin{pmatrix}\sin^2\Theta\cos^2\varphi-\frac{1}{2} & \sin^2\Theta\cos\varphi\sin\varphi & \sin\Theta\cos\Theta\cos\varphi\\ \sin^2\Theta\cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\Theta\sin^2\varphi-\frac{1}{2} & \sin\Theta\cos\Theta\sin\varphi\\ \sin\Theta\cos\Theta\cos\varphi & \sin\Theta\cos\Theta\sin\varphi & \cos^2\Theta-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

und das Ergebnis auf der Trennfläche ist

$$\hat{\mathbf{T}}==\frac{Q^2r^2}{4\pi R^6}\begin{pmatrix}\cos^2\varphi-\frac{1}{2} & \cos\varphi\sin\varphi & 0\\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie die Kraft, welche auf die nördliche Hemisphäre wirkt.

Aufgabe 4 *Eichtransformation* [2 + 1 = 3 Punkte]

a) Bestimmen Sie die Felder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$,$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, sowie ρ und $\mathbf{j}$ bezüglich der Eichpotentiale

$$\Phi(\mathbf{r},t) = 0$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -\frac{Qtc}{r^2}\hat{e}_r$$

b) Verwenden Sie die Eichfunktion $\lambda = -\frac{Qtc}{r}$ um die Potentiale aus a) zu transformieren. Diskutieren Sie kurz das Ergebnis.

Aufgabe 5 *Elektrostatisches Potential* [1 + 1 + 2 = 4 Punkte]

In der Vorlesung haben Sie gelernt das die statischen Maxwell-Gleichungen für das elektrische Feld durch die Einführung eines Potentiales $E = -\nabla\Phi$ zu $\Delta\Phi = 4\pi\rho$ entkoppelt werden können. Ferner haben Sie gelernt das sich die Lösung im freiem Raum zu

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$

ergibt.
Parametrisieren Sie für die nachfolgende Fälle die Ladungsverteilungen und berechnen Sie das Potential:

a) Zwei Ladungen Q_1, Q_2 mit Positionen $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$.

b) Einen um die z-Achse symmetrischen, entlang der x-Achse gespannten, unendlich dünnen homogen Draht der Länge $2L$ und Gesamtladung Q.

c) Eine unendlich dünne geladene Kugelschale mit Radius R und Gesamtladung Q.
Hinweis: Wählen Sie das Koordinatensystem sodass $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ den Winkel Θ' in Kugelkoordinaten einschließen.