Universität des Saarlandes
NT Fakultät

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
Gebäude E 2.6, Zi. 4.15
Mail: l.santen@mx.uni-saarland.de

Saarbrücken, den 3.01.2019

Blatt 2 zur Theoretischen Biophysik

Aufgabe 1 *(Fourier- und Laplace-Transformationen)*

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f(t) = \exp(-|t|)$. Zeigen Sie durch Anwendung der Rücktransformation, dass

$$\frac{\pi}{2}\exp(-|t|) = \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t)}{1+\omega^2}\, d\omega$$

gilt. Führen Sie im Anschluss die Substitution $\omega = \tan\theta$ durch und überprüfen Sie damit die Gültigkeit des Parsevalschen Theorems für diese Funktion.

b) Zeigen Sie, dass für die Laplace-Transformierten von $f(t) = \sqrt{t}$ und $g(t) = 1/\sqrt{t}$ gilt: $\bar{f}(s) = \frac{\sqrt{\pi/s^3}}{2}$ bzw. $\bar{g}(s) = \sqrt{\pi/s}$.

Hinweis: Benutzen Sie die Identität

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

und substituieren Sie dann $x^2 = ts$.

c) Für die Funktion $f_a(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} f_a(x) &= 1 \qquad && \text{für} \quad 0 < x < a \\ f_a(x) &= 0 && \text{sonst.} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\bar{f}_a(s)$ der Funktion und leiten Sie daraus her, dass die Laplace-Transformierte der Funktion $xf_a(x)$ durch

$$\frac{1}{s^2}\left[1-(1+as)e^{-sa}\right]$$

gegeben ist. Drücken Sie nun $f_a(x)$ durch die Stufenfunktion aus und leiten Sie auf diese Weise einen expliziten Ausdruck für

$$g_a(x) = \int_0^x f_a(y) f_a(x-y) dy.$$

her. Benutzen Sie den Ausdruck, um $\bar{g}(s)$ als Funktion von $\bar{f}_a(s)$, $\bar{f}_{2a}(s)$ und deren Ableitungen auszudrücken. Zeigen Sie schließlich, dass $\bar{g}(s) = \left(\bar{f}_a(s)\right)^2$ gilt, was sich auch aus dem Faltungssatz ergibt.

Aufgabe 2 *(Random Walk: Drift)*

a) Lösen Sie die Konvektions-Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

durch Laplace-Transformation. Zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierte $\bar{P}(x,s)$ der Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x,t)$ durch

$$\bar{P}_{\pm}(x,s) = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 4Ds}} e^{-\alpha_{\pm}|x|}$$

gegeben ist, wobei der Index + bzw. − für den Wertebereich $x > 0$ bzw. $x < 0$ steht. Die Konstanten der $\alpha_{\pm}$ sind gegeben durch

$$\alpha_{\pm} = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 4Ds}}{2D}$$

Invertieren Sie im Anschluss die Laplace-Transformierte, um wieder die Gauß-Form der Wahrscheinlichkeitsdichte zu erhalten.

Aufgabe 3 *(Random Walk: Randbedingungen)*

Ein diffusives Teilchen bewege sich im Intervall $[0, L]$. Das Teilchen habe eine Diffusivität D und einen Bias v. Der Rand bei $x = 0$ sei absorbierend und der bei $x = L$ reflektierend.

a) Berechnen Sie die mittlere Zeit und die mittlere quadratische Zeit, die ein Teilchen, das bei $x = L$ startet, braucht, um $x = 0$ zu erreichen. Unterscheiden Sie die Fälle $v > 0$, $v = 0$ und $v < 0$.

b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der Verteilung der Adsorptionszeiten. Diskutieren Sie die das asymptotische Verhalten für $t \to 0$ und $t \to \infty$. Unterscheiden Sie wiederum die Fälle $v > 0$, $v = 0$ und $v < 0$.