Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 11.04.2019

Blatt 1 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 18.04.2019, 14.00 Uhr)

- Die Anmeldung zur Übung erfolgt auf der Homepage der Arbeitsgruppe und muss bis spätestens zum 12.04.2019 erfolgt sein.
- Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt zu Beginn der Donnerstagsvorlesung. Die Abgabe kann bis zu diesem Zeitpunkt (14 Uhr) auch im Postfach der Arbeitsgruppe (Gebäude E2.6, EG) erfolgen.
- Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen bearbeitet werden, d.h. es dürfen maximal drei Namen auf einer Lösung stehen.
- Kennzeichnen Sie bitte Ihre Übungsgruppe (Name des Übungsleiters) auf den abgegebenen Blättern.
- Zulassungsvoraussetzung für die Klausur sind 50% der Punkte aus den Übungsaufgaben und eine aktive Teilnahme an den Übungen mit mind. zweimal Vorrechnen.

Aufgabe 1 *Gauß-Integral, Delta-Distribution, Fouriertransformation* [$3 + 2.5 + 9 + 5.5 = 20$ Punkte]

a) i) Zeigen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

ii) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{-\alpha x^2+\beta x+\gamma} dx$ unter Verwendung der Teilaufgabe i).

b) Eine mögliche Approximation der Delta-Distribution $\delta(x)$ ist die Gauß-Verteilung $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon}\mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}}$ mit verschwindender Streuung ($\epsilon \to 0$). Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}} dx = f(0)$$

c) Die Fouriertransformation ist definiert als $\mathcal{F}[f(x)] = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{-ikx} f(x)dx$ und die Rücktransformation als $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{ikx}\tilde{f}(k)dk$.

i) Zeigen Sie $\mathcal{F}[f(x-a)] = \mathbf{e}^{-ika}\mathcal{F}[f(x)]$.

ii) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Gauß-Verteilung $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon}\mathbf{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\epsilon^2}}$.

iii) Zeigen Sie mit Hilfe der Teilaufgabe b) und c)ii), dass die Delta-Distribution geschrieben werden kann als

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{ik(x-x_0)} dk$$

iv) Zeigen Sie mit Hilfe der Teilaufgabe iii), dass die Fouriertransformation $\tilde{f}(k)$ invertiert wird durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{ikx} \tilde{f}(k) dk$$

v) Zeigen Sie mit Hilfe der Teilaufgabe iii), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

d) Gegeben sei die Wellenfunktion $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma^2}} \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$.

i) Berechnen Sie $\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$ und $\Delta X = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle}$.

ii) Berechnen Sie $\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \mathbf{e}^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx$ sowie $\langle P \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p |\tilde{\psi}(p)|^2 dp$ und $\Delta P = \sqrt{\langle (P - \langle P \rangle)^2 \rangle}$.

Bemerkung: Sie sollten $\Delta X \Delta P = \hbar/2$ erhalten.

Aufgabe 2 *Eigenwerte und Eigenvektoren* $[0.5 + 2 + 2.5 + 4 = 9$ Punkte$]$

Betrachten Sie die folgenden Opertoren in Matrixdarstellung:

$$\hat{L_x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{L_y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{L_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\hat{L_z}$.

b) Wir betrachten den Eigenzustand $|L_z, +\rangle$ von $\hat{L_z}$ zum Eigenwert $+1$. Berechnen Sie für diesen Zustand $\langle \hat{L_x} \rangle = \langle +, L_z | \hat{L}_x | L_z, + \rangle$, $\langle \hat{L_x}^2 \rangle$ und $\Delta \hat{L}_x = \sqrt{\langle (\hat{L}_x - \langle \hat{L}_x \rangle)^2 \rangle}$.

c) Berechnen Sie die normierten Eigenzustände und Eigenwerte von $\hat{L}_x$.

d) Wir betrachten den Eigenzustand von $\hat{L_z}$ zum Eigenwert -1. Wenden Sie $\hat{L_x}$ auf diesen Zustand an. Was sind die möglichen Messwerte? Geben Sie zu den Messwerten auch die Wahrscheinlichkeiten an.

Aufgabe 3 *Diagonalisierung und Basistransformation* $[4.5 + 6.5 = 11$ Punkte$]$

a) Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

i) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

ii) Diagonalisieren Sie die Matrix A.

iii) Berechnen Sie e^A.

b) Betrachten Sie die folgenden Matrizen und ihre Eigenvektoren in der $|z, \pm\rangle$-Basis.

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |z, +\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z, -\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |x, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z, +\rangle \pm |z, -\rangle), \quad |x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |x, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad |y, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z, +\rangle \pm i|z, -\rangle), \quad |y, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, |y, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

i) Drücken Sie $|y, \pm\rangle$ durch die Basis $|x, \pm\rangle$ aus.

ii) Schreiben Sie $\sigma_x =$ in der $|y, \pm\rangle$-Basis.

ii) Schreiben Sie $\sigma_x =$ in der $|x, \pm\rangle$-Basis.