Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 18.04.2019

Blatt 2 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 25.04.2019, 14.00 Uhr)

Aufgabe 1 *Kommutatorrelationen* [$6.5 + 7.5 + 2 + 1.5 = 17.5$ Punkte]

Der Kommutator zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist definiert als $[\hat{A},\hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

a) i) Zeigen Sie $[\hat{A},\hat{B}] = -[\hat{B},\hat{A}]$.

ii) Zeigen Sie $[\hat{A},\alpha\hat{B} + \beta\hat{C}] = \alpha[\hat{A},\hat{B}] + \beta[\hat{A},\hat{C}]$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

iii) Zeigen Sie die Jacobi-Identität $[\hat{A},[\hat{B},\hat{C}]] + [\hat{B},[\hat{C},\hat{A}]] + [\hat{C},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$.

iv) Drücken Sie den Kommutator $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]$ durch die Kommutatoren $[\hat{A},\hat{C}]$ und $[\hat{B},\hat{C}]$ aus.

v) Zeigen Sie die Gültigkeit der Relation

$$[\hat{A}^m,\hat{B}] = m\hat{A}^{m-1}[\hat{A},\hat{B}]$$

falls $[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = 0$ ($m \in \mathbb{N}$) gilt.

vi) Zeigen Sie für jede analytlische Funktion f, das für $[\hat{A},\hat{B}] = 0$, $[f(\hat{A}),\hat{B}] = 0$ folgt.

b) Im Folgenden gelte $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$ und $[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$.

i) Zeigen Sie

$$\mathbf{e}^{\hat{A}}\hat{B}\mathbf{e}^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}],$$

indem Sie $\hat{K}(\alpha) = \mathbf{e}^{\alpha\hat{A}}\hat{B}\mathbf{e}^{-\alpha\hat{A}}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), Taylor entwickeln.

ii) Zeigen Sie

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathbf{e}^{\hat{A}}\mathbf{e}^{\hat{B}}\mathbf{e}^{-[\hat{A},\hat{B}]/2} \quad \text{(Baker-Campbell-Hausdorff Formel)}$$

unter Verwendung von $\frac{d}{d\beta}\hat{H}(\beta) = \frac{d}{d\beta}\left(\mathbf{e}^{\beta\hat{A}}\mathbf{e}^{\beta\hat{B}}\right)$ und Aufgabenteil 1bi).

c) Betrachten Sie (differenzierbare) Funktionen über dem Intervall $[a,b]$ mit $\phi(a) = \phi(b) = 0$. Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ linear und selbstadjungiert ist.

d) Betrachten Sie den Raum, der auf der reellen Zahlenachse definierten differenzierbaren Funktionen. Zeigen Sie, dass $[\hat{x},\hat{D}_x] = -1$, wobei die Wirkung des Operators $\hat{x}$ ein Multiplikation mit x ist: $\hat{x}f(x) = xf(x)$ und die Wirkung von $\hat{D}$ definiert ist als: $\hat{D}_x = \frac{d}{dx}$.

Aufgabe 2 *Unitäre Matrizen* [$2 + 1 + 1.5 = 4.5$ Punkte]

Ein Operator $\hat{U}$ wird unitär genannt, wenn $\hat{U}^{-1} = U^\dagger$ gilt.

a) Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ unitäre Matrizen. Sind die nachfolgenden Matrizen unitär? Falls ja, zeigen Sie es. Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

   i) $\hat{A} + \hat{B}$ ii) $\hat{A}\hat{B}$ iii) $\hat{A}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ iv) $\hat{A}^{-1}$

b) Zeigen Sie, dass unitäre Matrizen das Skalarprodukt invariant lassen.
   (In anderen Worten: Das Skalarprodukt zwischen $\hat{U}|v_1\rangle$ und $\hat{U}|v_2\rangle$ ist das Gleiche, wie zwischen $|v_1\rangle$ und $|v_2\rangle$.)

c) Zeigen Sie, dass aus der Eigenschaft, dass der Operator $\hat{U} = 1 + i\epsilon\hat{F}$ unitär ist folgt, dass der Operator $\hat{F}$ hermitesch ist. Nehmen Sie dabei an, dass ϵ eine infinitesmal kleine Zahl ist, i.e. vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.

Aufgabe 3 *Unendliche Matrizen* [5 Punkte]

Betrachten Sie die folgende unendliche Matrix:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zunächst die zu $\hat{A}$ hermitesch konjugierte Matrix und berechnen Sie dann den Kommutator $[\hat{A}, \hat{A}^\dagger]$. Bestimmen Sie außerdem die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{A}^\dagger\hat{A}$.

Aufgabe 4 *Eigenwertproblem im Hilbertraum* [$4.5 + 4.5 + 4 = 13$ Punkte]

Wir betrachten die Wellengleichungen

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\Psi\rangle = -\hat{K}^2|\Psi\rangle$$

auf dem Intervall $x \in [0, L]$ mit der Wirkung des Operators $\hat{K}$:

$$\hat{K}|\Psi\rangle = -i\left|\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right\rangle$$

Außerdem fordern die Randbedingungen $\langle x|\Psi\rangle\big|_{x=0} = \langle x|\Psi\rangle\big|_{x=L} = 0$.

a) Lösen Sie das Eigenwertproblem des Operators $-\hat{K}^2$.

b) Wir fordern die Anfangsbedingung

$$\left\langle x\left|\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t=0)\right.\right\rangle = 0.$$

   Konstruieren Sie den Propagator $\hat{U}(t)$, sodass $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(t=0)\rangle$ gilt.

c) Bestimmen Sie $|\Psi(t)\rangle$ mit den zusätzlichen Anfangsbedingungen

$$\langle x|\Psi(t=0)\rangle = \begin{cases} \frac{x}{L} & \text{, für } 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{L-x}{L} & \text{, für } \frac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$