Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 25.04.2019

Blatt 3 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 02.05.2019, 14.00 Uhr)

Aufgabe 1 *Eindimensionales freies Teilchen* [$12 + 6 = 18$ Punkte]

a) Im Folgenden wollen wir die eindimensionale Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen im Ortsraum lösen.

i) Lösen Sie die Eigenwertgleichung des Impulsoperators

$$\hat{p}\,|u_p\rangle = p\,|u_p\rangle$$

im Ortsraum unter Berücksichtigung der Orthonormierungsbedingung $\langle u_{p'}|u_p\rangle = \delta(p - p')$.

ii) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein freies Teilchen

$$\hat{H}\,|u_E\rangle = E\,|u_E\rangle \qquad (E \geq 0) \tag{1}$$

und geben Sie den Zusammenhang zwischen den Eigenwerten E und p an. Geben Sie außerdem die allgemeine Lösung $\Psi_E(x)$ der Eigenwertgleichung (1) zum Eigenwert E im Ortsraum an.

iii) Zeigen Sie, dass $\Psi_E(x,t) = \Psi_E(x)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung zum Eigenwert E ist.

iv) Geben Sie die allgemeine Lösung $\Psi(x,t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung im Ortsraum an.
Hinweis: Geben Sie dabei auch eine Bestimmungsgleichung für den Koefficienten $c(p)$ an.

v) Für die Matrixelemente des Propagators im Ortsraum gilt: $\Psi(x,t) = \int dx' U(x,t,x')\Psi(x', t = 0)$. Berechnen Sie den Propagator im Ortsraum.

b) Als Beispiel eines Anfangswertproblems betrachten wir das Gauß-Paket

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left[\frac{ip_0}{\hbar}x - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \tag{2}$$

mit $p_0 \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

i) Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$.

ii) Berechnen Sie $\langle X(t)\rangle$, $\left\langle \left(X(t) - \langle X(t)\rangle\right)^2 \right\rangle$ und $\langle P(t)\rangle$.

Aufgabe 2 *Impulsoperator* $[2+3=5$ Punkte$]$

a) Zeigen Sie, dass für eine reellwertige Wellenfunktion $\Psi(x)$ der Erwartungswert des Impulsoperators null wird: $\langle p \rangle = 0$.

Verallgemeinern Sie das Ergebnis für den Fall $\Psi_r(x) = c\Psi(x)$, wobei $\Psi(x)$ reellwertig ist und c eine beliebige, reelle oder complexe Konstante ist.

b) Zeigen Sie, dass wenn die Wellenfunktion $\Psi(x)$ den Erwartunsgwert $\langle p \rangle$ hat, die Wellenfunktion $\Psi_r(x) = \mathbf{e}^{\frac{i}{\hbar}p_0 x}\Psi(x)$ den Erwartungswert $\langle p \rangle + p_0$ hat.

Aufgabe 3 *Quantenmechanische Messungen* $[1+1+6+3+6=17$ Punkte$]$

Betrachten Sie den Operator $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und den Zustand} \qquad |\Psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

in der Eigenbasis von $\hat{A}$.

a) Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{A}$?

b) Zeigen Sie, dass $|\Psi\rangle$ normiert ist.

c) Bei der Messung von $\hat{A}^2$ erhalten wir den Wert $+1$.

   i) Bestimmen Sie den normierten Zustand nach der Messung.
   ii) Wie wahrscheinlich war es das Ergebnis $+1$ zu erhalten?
   iii) Jetzt (nach der Messung von $\hat{A}^2$) wird $\hat{A}$ gemessen. Geben Sie die möglichen Ergebnisse und ihre Wahrscheinlichkeiten an.

d) Was wäre das Ergebniss der iii), wenn erst $\hat{A}$ mit dem Ergebnis $+1$ und dann $\hat{A}^2$ gemessen werden würde?

e) Ein Teilchen befindet sich in einem Zustand mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten: $Pr(1) = \frac{1}{4}$, $Pr(2) = \frac{1}{4}$ und $Pr(-1) = \frac{1}{2}$.

   i) Überzeugen Sie sich selbst davon, dass der allgemeine, normierte Zustand mit den gegebenen Wahrscheinlichkeiten wie folgt aussieht:

$$|\Psi'\rangle = \frac{\mathbf{e}^{i\theta_1}}{2}|1\rangle + \frac{\mathbf{e}^{i\theta_2}}{2}|2\rangle + \frac{\mathbf{e}^{i\theta_3}}{\sqrt{2}}|-1\rangle \tag{3}$$

   wobei $\{|1\rangle, |2\rangle, |-1\rangle\}$ die Eigenbasis von $\hat{A}$ ist und $\theta_i \in \mathbb{R}$.

   ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilchen im Zustand $|\Psi'\rangle$ im Zustand

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle$$

   ist.

   iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilchen im Zustand $|\Psi\rangle$ im Zustand $|\Phi\rangle$ ist.
   iv) Wir wissen, dass $\mathbf{e}^{i\theta}|\Psi\rangle$ ein physikalisch äquivalenter Zustand zu $|\Psi\rangle$ ist. Bedeutet das, dass die Faktoren $\mathbf{e}^{i\theta_i}$ vor den Eigenvektoren von $\hat{A}$ (Gl. (3)) irrelevant sind?