Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 02.05.2019

Blatt 4 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 09.05.2019, 14.00 Uhr)

Aufgabe 1 *Teilchen im Potentialtopf* [$9 + 3 + 6 + 5 = 23$ Punkte]

a) Wir betrachten den eindimensionalen, endlichen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq \frac{L}{2} \\ V_0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad V_0 \in \mathbb{R},\, V_0 > 0 \tag{1}$$

Wir sind im Folgenden an den gebunden Zuständen mit $0 < E < V_0$ interessiert.

i) Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für die Bereiche I: $x < -\frac{L}{2}$, II: $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ und III: $x > \frac{L}{2}$ unter Verwendung der Wellenzahlen $\pm k$ innerhalb und $\pm i\kappa$ außerhalb des Potentialtopfes.

ii) Da $V(x) = V(-x)$ gilt, gibt es symmetrische und antisymmetrische Eigenfunktionen. Stellen Sie die Stetigkeitsbedingungen an den Rändern des Potentialtopfes auf und geben Sie für die symmetrische und antysymmetrische Lösung jeweils eine Gleichung an, die k und κ implizit festlegt.

iii) Lösen Sie die beiden impliziten Gleichungen für k und κ graphisch.
Hinweis: Sie benötigen einen weiteren Zusammenhang zwischen k und κ.

iv) Zeigen Sie, unter Verwendung der graphischen Lösung, dass es für den symmetrischen Fall immer eine Lösung gibt und bestimmen Sie die Bedingung, die erfüllt sein muss, damit es für den antisymmetrischen Fall mindestens eine Lösung gibt.

b) Wir betrachten nun den Potentialtopf (1) im Grenzfall $V_0 \to \infty$.

i) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion für die Bereiche I und III im Grenzfall $V_0 \to \infty$ Null wird.

ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte E_n und zugehörigen normierten Eigenzustände $\psi_n(x)$ mit $n = 1, 2, \ldots$.

c) Wir nehmen an ein Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Grundzustand $\psi_1(x)$ des unendlichen Potentialtopfes (siehe b)). Die Breite des Potentialtopfes wird zum Zeitpunkt $t = 0$ instantan verdoppelt. Das neue Potential sei

$$V_L(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür das Teilchen im Grundzustand $\psi_1'(x)$ des neuen Potentialtopfes anzutreffen.

ii) Berechnen Sie die zeitabhängige Wellenfunktion für $t > 0$, indem Sie den Grundzustand $\psi_1(x)$ in Abhängigkeit der neuen Eigenzustände $\psi'_n(x)$ entwickeln: $\psi_1(x) = \sum_{n\geq 1} c_n \psi'_n(x)$.

Hinweis: Der Anfangszustand des Teilchens ist nach der Verdoppelung kein Eigenzustand des neuen Hamiltonoperators mehr.

d) Der endliche Potentialtopf (1) soll nun um $\frac{L}{2}$ nach rechts verschoben werden. Das verschobene Potential ist damit:

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ V_0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad V_0 \in \mathbb{R},\, V_0 > 0 \tag{3}$$

i) Zeigen Sie, dass die zeitunabhängige Wellenfunktion des verschobenen Potentialtopfes gegeben ist durch $\tilde{\psi}(x + \frac{L}{2}) = \psi(x)$, wobei $\psi(x)$ die zeitunabhängige Wellenfunktion des ursprünglichen Potentialtopfes (1) ist.

ii) Geben Sie die symmetrische und antisymmetrische Lösung des verschobenene Potentialtopfes an.

iii) Berechnen Sie die normierten Eigenfunktionen des verschobenen Potentialtopfes $V\tilde{(x)}$ im Grenzfall $V_0 \to \infty$ unter Verwendung der ii).
Hinweis: Die Gleichungen, die k und κ implizit festlegen, bleiben unverändert.

Aufgabe 2 *Delta-Potentiale* [6 + 11 = 17 Punkte]

a) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im Potential $V(x) = -\alpha\delta(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$).

i) Leiten Sie für die Ableitung der stationären Lösung der Schrödinger-Gleichung die Stetigkeitsbedingung bei $x = 0$ her.

ii) Bestimmen Sie den normierten gebundenen Zustand und seine zugehörige Energie.

b) Betrachten Sie das Doppel-Delta-Potential

$$V(x) = -\alpha[\delta(x-a) + \delta(x+a)] \quad \text{mit} \quad \alpha, a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \alpha, a > 0$$

Da $V(x) = V(-x)$ gilt, gibt es symmetrische und antisymmetrische Lösungen.

i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung in allen drei Bereichen.

ii) Vereinfachen Sie die Lösungen unter Verwendung der Randbedingungen und geben Sie die Stetigkeitsbedingungen an.

iii) Bestimmen Sie die symmetrischen und antisymmetrischen Lösungen (eine unbekannte Konstante bleibt) und geben Sie dabei jeweils eine transzendente Gleichung für die Wellenzahl k an. Bestimmen Sie außerdem, mithilfe graphischer Lösung, wann die transzendenten Gleichungen eine Lösung haben.