Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 09.05.2019

Blatt 5 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 16.05.2019, 14.00 Uhr)

Aufgabe 1 *Paritätsoperator* $[2+2+3=7$ Punkte$]$

Der Paritätsoperator $\hat{\Pi}$ ist definiert durch $\hat{\Pi}|p\rangle = |-p\rangle$, wobei $|p\rangle$ der Eigenket des Impulsoperators $\hat{p}$ zum Eigenwert p ist.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{\Pi} = \hat{\Pi}^\dagger = \hat{\Pi}^{-1}$ und $\hat{\Pi}^2 = 1$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\hat{\Pi}$ die Eigenwerte ± 1 hat und die zugehörigen Eigenfunktionen gerade und ungerade sind.

c) Berechnen Sie die Kommutatoren $\left[\hat{p}^2, \hat{\Pi}\right]$ und $\left[\hat{H}, \hat{\Pi}\right]$ für den Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$, dessen Potential die Eigenschaft $V(x) = V(-x)$ besitzt.

   Was kann man folglich über die Eigenzustände des Hamiltonoperators aussagen?

Aufgabe 2 *Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstromdichte* $[3+3+3=9$ Punkte$]$

Eine Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x}, t)$ wird durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}, t) = \Big(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x})\Big)\psi(\mathbf{x}, t)$$

bestimmt. (Das Potential $V(\mathbf{x})$ ist reell.)

a) Zeigen Sie die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit $\langle\psi|\psi\rangle$.

b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathrm{Pr}(t, \mathbf{x})$ erfüllt die Kontinuitätsgleichung $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{Pr} = -\nabla \cdot \mathbf{j}$.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}$ in Abhängigkeit von $\psi(\mathbf{x}, t)$.

c) Gegeben sei die eindimensionale Wellenfunktion $\psi(x) = A\mathbf{e}^{\frac{ipx}{\hbar}} + B\mathbf{e}^{-\frac{ipx}{\hbar}}$. Berechnen Sie j und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3 *Streuung und Tunneleffekt* [$8 + 8 + 8 = 24$ Punkte]

Wir betrachten eine von links einfallende Welle mit Energie E.

a) Berechnen Sie den Reflektions- und Transmissionskoeffizient R und T für die Streuung am Delta-Potential $V(x) = V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$.

b) Berechnen Sie den Reflektions- und Transmissionskoeffizient R und T für

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 < x < L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad V_0 > 0$$

Diskutieren Sie dabei die Fälle $E > V_0$ und $0 < E < V_0$.

c) Berechnen Sie für $E > V_0$ den Reflektions- und Transmissionskoeffizient R und T für

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad V_0 > 0$$

Zeigen Sie außerdem, dass $R = |j_\mathrm{R}|/|j_\mathrm{E}|$ und $T = |j_\mathrm{T}|/|j_\mathrm{E}|$ gilt, wobei j_E, j_R und j_T die Wahrscheinlichkeitsstromdichten der einfallenden, reflektierten und transmittierten Welle sind.