Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
L. Giannelli (Mail: luigi.giannelli@physik.uni-saarland.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 16.05.2019

Blatt 6 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 23.05.2019, 14.00 Uhr)

Mitteilung: Ab sofort gibt es ein Tutorium. Das Tutorium findet mittwochs von 14-16 Uhr in Geb. E2 4, HS 4 statt. Das Tutorium wird in englischer Sprache gehalten. Für das Tutorium sind folgende Regeln zu beachten:

- Fragen müssen bis spätestens Freitagabend auf englisch an Luigi Giannelli per Mail (siehe Kopf) geschickt werden.
- Es werden nur Fragen beantwortet, die vorher an Luigi Giannelli gestellt wurden.
- Sind bis Freitagabend keine Fragen eingegangen, findet am darauf folgenden Mittwoch kein Tutorium statt.

Aufgabe 1 *Hermitesche Polynome* [$6 + 3 + 4 = 13$ Punkte]

Die Hermiteschen Polynome können als

$$h_n(x) = n! \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^\ell}{\ell!(n-2\ell)!} (2x)^{n-2\ell} \quad , \tag{1}$$

mit $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ für gerade n, und $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ für ungerade n, geschrieben werden.

a) Zeigen Sie die alternative Darstellung $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

b) Zeigen Sie die Relationen i) $h'_n = 2n h_{n-1}$, ii) $h_{n+1} = 2x h_n - h'_n$ und iii) $h_{n+1} = 2x h_n - 2n h_{n-1}$.

c) Zeigen Sie die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\langle h_{n'}, h_n \rangle = \sqrt{\pi}\, 2^n n!\, \delta_{n'n} \quad \text{mit} \quad \langle h_{n'}, h_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_{n'}(x) h_n(x) e^{-x^2} dx \; .$$

Aufgabe 2 *Harmonischer Oszillator* [$7 + 6 = 13$ Punkte]

a) Im Folgenden wollen wir die stationäre Schrödinger-Gleichung $E\psi_E(x) = \hat{H}\psi_E(x)$ für den harmonischen Oszillator $\hat{H} = \dfrac{\hat{P}^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m\omega^2 \hat{X}^2$ lösen.

   i) Substituieren Sie $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, y$ und $\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega}$ und leiten Sie eine Differentialgleichung für $\psi(y)$ her.

ii) Schaut man sich die Grenzen $y \to \infty$ und $y \to 0$ an, so stellt man fest, dass die Lösungen von der Form $\psi(y) = u(y)\mathbf{e}^{-\frac{y^2}{2}}$ sein müssen (siehe Vorlesung). Stellen Sie eine Differentialgleichung für $u(y)$ auf und verwenden Sie den Ansatz $u(y) = \sum_{k\geq 0} c_k \, y^k$ um eine Rekursionsformel für c_k herzuleiten.

iii) Schreiben Sie die Rekursionsformel in der Form

$$c_k = -\frac{(k+1)(k+2)}{2(n-k)}$$

unter Verwendung, dass $\epsilon = \frac{2n+1}{2}$ sein muss, wobei n den Energieeigenwert bestimmt.

iv) Berechnen Sie c_{n-2}, c_{n-4}, c_{n-6}, etc. in Abhängigkeit von c_n und finden Sie eine allgemeine Formel für c_{n-2l}.
Hinweis: Sie müssen nicht zwischen gerade und ungeraden n unterscheiden.

v) Aus der Grenzwertbetrachtung $y \to \infty$ wissen wir, dass $u(y) \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} y^n$ (siehe Vorlesung), weshalb gilt: $u(y) = \sum_{k=0}^{n} c_k y^k$. Außerdem wird $c_0 = 0$ gesetzt für ungerade n und $c_1 = 0$ für gerade n (siehe Vorlesung). Daher können wir schreiben:

$$u_n(y) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{n-2l} \, y^{n-2l} \quad \text{mit} \quad \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für gerade } n \\ \frac{n-1}{2} & \text{für ungerade } n \end{cases}$$

Setzen Sie den gefunden Ausdruck für c_{n-2l} ein und zeigen Sie, dass $u_n(y) = h_n(y)$, wobei $h_n(y)$ die Hermiteschen Polynome sind, welche in Gleichung (1) gegeben sind.
Hinweis: $c_n = 2^n$.

b) Wie in Aufgabe a) gezeigt, können wir die Eigenzustände als Hermitesche Polynome ausdrücken. Demnach gilt $\psi_n(y) = \alpha_n h_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}}$ mit zugehörigen Energien $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

i) Normieren Sie die Eigenzustände.
ii) Berechnen Sie ΔX und ΔP .
iii) Überprüfen Sie die Unschärferelation und bestimmen Sie wann $\Delta X \Delta P$ minimal wird.

Aufgabe 3 *Erzeugungs- und Vernichtungsoperator* [2 + 1 + 3 + 4 + 2 + 2 = 14 Punkte]

Wir führen die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, X - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, P \,, \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, X + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, P \,,$$

ein.

a) Drücken Sie $\hat{H}$ mithilfe des Besetzungszahl Operators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ aus.

b) Wegen a), sind die Energieeigenzustände $|n\rangle$ auch Eigenzustände von $\hat{N}$. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

c) Berechnen Sie folgende Kommutatoren: $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$, $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$, und $[\hat{N}, \hat{a}]$.

d) Zeigen Sie die Relationen $\hat{a}|n\rangle = c_n|n-1\rangle$ und $\hat{a}^\dagger|n\rangle = d_n|n+1\rangle$ unter Verwendung der iii) und bestimmen Sie die Koeffizienten $c_n \geq 0$ und $d_n \geq 0$.

Hinweis: Sie können annehmen, dass die $\{|n\rangle\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ eine vollständige Basis von $\hat{N}$ bilden.

e) Schreiben Sie $|n\rangle$ in Abhängigkeit von $|0\rangle$ und $\hat{a}^\dagger$.

f) Drücken Sie $\hat{X}$ und $\hat{P}$ in Abhängigkeit von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus und berechnen Sie die Unschärferelation $\Delta X \Delta P$.