Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
L. Giannelli (Mail: luigi.giannelli@physik.uni-saarland.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 23.05.2019

# Blatt 7 zur Theoretischen Physik III, SS2019

**(Abgabe bis 31.05.2019, 10.00 Uhr im Briefkasten)**

Mitteilung: Aufgrund des Feiertages am Donnerstag, können Sie die Lösungen dieses Blatts bis **Freitag 10 Uhr im Briefkasten** der Arbeitsgruppe (Gebäude E2.6, EG) einreichen. Alternativ können Sie die Lösung auch in der Mittwochsvorlesung abgeben.

**Aufgabe 1** *Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators* $[4+4+6+8=22$ Punkte$]$

Wir betrachten den harmonischen Oszillator in einer Dimension.

a) Der Verschiebungsoperator $D(\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ ist definiert durch $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$, wobei $a^\dagger$ und $a$ wie üblich die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind. Zeigen Sie

   i) $D(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}$ ii) $D^\dagger(\alpha) = D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha)$ iii) $D(\alpha) a D(-\alpha) = a - \alpha$ .

   Hinweis: Verwenden Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$.

b) Der kohärente Zustand $|\alpha\rangle$ ist definiert als ein Eigenzustand von $a$, i.e. $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

   i) Zeigen Sie $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$. Hinweis: Man zeigt schnell $aD(-\alpha)|\alpha\rangle = 0$.
   ii) Berechnen Sie $\langle 0|\alpha\rangle$. iii) Drücken Sie $|\alpha\rangle$ in Abhängigkeit der $|n\rangle$'s aus.

c) Das System befinde sich im Zustand $|\alpha\rangle$. Berechnen Sie
   i) $\langle N\rangle$
   ii) $\left|\langle n|\alpha\rangle\right|^2$
   iii) $\Delta X \Delta P$

d) Wir betrachten nun die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $|\psi(t)\rangle$, mit Anfangszustand $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$.

   i) Zeigen Sie $|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2}\ |\alpha(t)\rangle$ mit $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$.
   ii) Berechnen Sie $\bar{x}(t) = \langle X(t)\rangle$.
   iii) Berechnen Sie Wahrscheinlichkeitsdichte zum Zeitpunkt $t$.
   Hinweis: Das Ergebnis ist gaußverteilt.

**Aufgabe 2** *N-Teilchen System* $[2+6=8$ Punkte$]$

a) Wir betrachten ein System mit zwei ununterscheidbaren Teilchen, die wir im folgenden mit 1 und 2 Indizieren. Jeder normierte Zustand $|\Psi(1,2)\rangle$ muss $|\Psi(1,2)\rangle = \alpha|\Psi(2,1)\rangle$ erfüllen.

   Zeigen Sie $\alpha = \pm 1$.

   Bemerkung: $\alpha = 1 \hat{=}$ Bosonen, $\alpha = -1 \hat{=}$ Fermionen

b) Wir betrachten nun ein System mit drei Teilchen. Die möglichen bosonischen Symmetrien sind

$$|\Psi(1,2,3)\rangle = |\Psi(2,1,3)\rangle = |\Psi(3,2,1)\rangle = |\Psi(1,3,2)\rangle.$$

Die möglichen fermionischen Symmetrien sind

$$|\Psi(1,2,3)\rangle = -|\Psi(2,1,3)\rangle = -|\Psi(3,2,1)\rangle = -|\Psi(1,3,2)\rangle.$$

Konstruieren Sie die normierten Eigenzustände. (Der Einfachheit halber betrachten wir nur Situationen in denen drei Teilchen drei verschiedene Zustände annehmen)

**Aufgabe 3** *Harmonischer Oszillator in zwei Dimensionen* [$6+4=10$ Punkte]

Wir betrachten die Schrödinger-Gleichung mit Hamilton Operator

$$H = \tfrac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2\right) + \tfrac{m\omega^2}{2}X^2 + \tfrac{m\omega^2}{2}Y^2$$

a) Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung im Ortsraum.

Hinweis: Nutzen Sie die Lösung des eindimensionalem harmonischen Oszillators.

Zeigen Sie zudem, dass die erlaubten Energien durch

$$E = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega$$

gegeben sind.

b) Berechnen Sie den Entartungsgrad der Energieeigenzustände

c) Schreiben Sie die zugehörigen Wellenfunktionen in Form von Einzeloszillatorwellenfunktionen. Zeigen Sie, dass diese Wellenfunktionen eine bestimmte Parität hat und diese nur von : $(n_x + n_y)$ abhängt.