Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
L. Giannelli (Mail: luigi.giannelli@physik.uni-saarland.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 29.05.2019

Blatt 8 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 06.06.2019, 14:00 Uhr)

Aufgabe 1 *Eigenwertproblem des Drehimpulsoperators* [$2 + 3 + 2 + 5 = 12$ Punkte]

Wir betrachten das Eigenwertproblem des Operators $\hat{L}_z = \hat{X}\hat{P}_y - \hat{Y}\hat{P}_x$.

a) Berechnen Sie explizit die Wirkung von $\hat{L}_z$ auf eine Wellenfunktion $\langle r, \varphi|\psi\rangle$ in Polarkoordinaten.

b) Nun wollen wir den Funktionenraum für das Eigenwertproblem $\hat{L}_z|\psi\rangle = \ell_z|\psi\rangle$ einschränken.
Es gelte $\psi_n(r, \varphi) = \langle r, \varphi|\psi_n\rangle$. Zeigen Sie, dass $\psi_n(r, 0) = \psi_n(r, 2\pi)$ eine hinreichende Bedingung für die Hermitizität von $\hat{L}_z$ ist.

c) Zeigen Sie, dass die Bedingung aus b) die Eigenwerte l_z auf die diskreten Werte $\ell_z = m\hbar$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ festlegt.

d) Bestimmen Sie für jede der nachfolgenden Wellenfunktionen die Normierungskonstante C und die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathrm{Prob}[\ell_z = m\hbar]$.

   i) $\psi(r, \varphi) = Ce^{-r^2/(2r_0^2)} \cos^2 \varphi$
   ii) $\psi(r, \varphi) = Ce^{-r^2/(2r_0^2)} \big(\frac{r}{r_0} \cos \varphi + \sin \varphi\big)$

Aufgabe 2 *Harmonischer Oszillator in 2d und Drehimpulsoperator* [$2 + 2 + 2 + 2 = 8$ Punkte]

Wir betrachten den harmonischen Oszillator in zwei Dimensionen (siehe Blatt 7) und führen die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\hat{a}_x^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{X} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{P}_x\ , \quad \hat{a}_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{X} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{P}_x\ ,$$
$$\hat{a}_y^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{Y} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{P}_y\ , \quad \hat{a}_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{Y} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,\hat{P}_y\ ,$$

sowie die Besetzungszahloperatoren $\hat{N}_x = \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x$ und $\hat{N}_y = \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y$ ein.

a) Drücken Sie den Hamiltonoperator des zweidimensionalen harmonischen Oszillators (siehe Blatt 7) mit Hilfe von $\hat{N}_x$ und $\hat{N}_y$ aus.

b) Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ und $\hat{L}_z = \hat{X}\hat{P}_y - \hat{Y}\hat{P}_x$ gemeinsam messbar sind.

c) Unglücklicherweise gilt $\left[\hat{N}_x, \hat{L}_z\right], \left[\hat{N}_y, \hat{L}_z\right] \neq 0$, weshalb $\hat{L}_z$ und $\hat{N}_{x,y}$ keine gemeinsamen Eigenzustände haben. Wir definieren die neuen Operatoren $\hat{a}_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger \mp i\hat{a}_y^\dagger)$ und $\hat{a}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x \pm i\hat{a}_y)$.

Zeigen Sie $[\hat{H}, \hat{N}_+] = [\hat{H}, \hat{N}_-] = 0$, wobei für die Besetzungszahloperatoren $\hat{N}_\pm = \hat{a}_\pm^\dagger \hat{a}_\pm$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass $\hat{L}_z$ und $\hat{N}_\pm$ gemeinsam messbar sind.

Aufgabe 3 *Bahndrehimpulsoperator* [3 + 4 + 3 + 2 = 12 Punkte]

a) $\psi(r)\,(r \in \mathbb{R})$ sei eine Zustandsfunktion in der Ortsdarstellung. Die Wirkung des Rotationsoperators auf $\psi(r)$ ist gegeben durch $\hat{D}_z(\alpha)\psi(r) = \psi(R_z^{-1}(\alpha)r)$, wobei $R_z(\alpha)$ eine orthogonale Drehmatrix für eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ um die z-Achse mit Drehwinkel α ist. Betrachten Sie eine infinitesimale Drehung um den Winkel ϵ und zeigen Sie, dass für eine derartige Drehung

$$\hat{D}_z(\epsilon) = \hat{I} - \frac{i\epsilon}{\hbar}\hat{L}_z$$

gilt mit dem Bahndrehimpulsoperator $\hat{L}_z = \left(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{P}}\right)_z$.

Zeigen Sie weiterhin, dass für einen endlichen Drehwinkel α gilt: $\hat{D}_z(\alpha) = \mathbf{e}^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{L}_z}$.

Hinweis: Auf Blatt 2 haben wir gezeigt, dass wenn $\hat{U} = \hat{I} - i\epsilon\hat{F}$ unitär ist, $\hat{F}$ hermitesch ist.

b) Zeigen Sie, dass für die Komponenten $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ und $\hat{L}_z$ des Drehimpulsoperators und die Drehimpulsleiteroperatoren $\hat{L}_\pm := \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ die folgenden Relationen gelten:

i) $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$ für $i, j, k = x, y, z$.
ii) $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$ für $i, j, k = x, y, z$ und $[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$.
iii) $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$ und $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$.
iv) $\hat{L}_\pm\hat{L}_\mp = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \pm \hbar\hat{L}_z$.

c) Zeigen Sie des Weiteren:

i) $[\hat{L}_i, \hat{\mathbf{P}}^\mathbf{2}] = [\hat{L}_i, \hat{\mathbf{r}}^\mathbf{2}] = 0$.
ii) $[\hat{\mathbf{L}}^\mathbf{2}, \hat{\mathbf{P}}^\mathbf{2}] = [\hat{\mathbf{L}}^\mathbf{2}, \hat{\mathbf{r}}^\mathbf{2}] = 0$.
iii) $[\hat{L}_i, \hat{H}] = [\hat{\mathbf{L}}^\mathbf{2}, \hat{H}] = 0$, falls $\hat{H}$ zentralsymmetrisch ist.

Hinweis: ϵ_{ijk} ist das Levi-Civita-Symbol und es gilt die folgende Relation $\epsilon_{jmk}\epsilon_{ikn} - \epsilon_{imk}\epsilon_{jkn} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn}$ (Beweis optional).

d) Zeigen Sie, dass eine Rotation um π um die z-Achse realisiert werden kann durch erst eine Rotation um $\frac{\pi}{2}$ um die x-Achse, dann eine Rotation um π um die y-Achse und schließlich eine Rotation um $-\frac{\pi}{2}$ wieder um die x-Achse, *i.e.*

$$\mathbf{e}^{\frac{i\pi\hat{L}_x}{2\hbar}}\mathbf{e}^{\frac{-i\pi\hat{L}_y}{\hbar}}\mathbf{e}^{\frac{-i\pi\hat{L}_x}{2\hbar}} = \mathbf{e}^{\frac{-i\pi\hat{L}_z}{\hbar}}$$

Aufgabe 4 *Ehrenfest-Theorem* [3 + 2 + 3 = 8 Punkte]

a) Zeigen Sie das Ehrenfest-Theorem

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\left[\hat{H}, \hat{A}\right]\rangle + \langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\rangle$$

mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung.

b) Berechnen Sie $\frac{d}{dt}\langle\hat{P}\rangle$ und $\frac{d}{dt}\langle\hat{X}\rangle$ unter Verwendung der a).

c) i) Zeigen Sie $\frac{d}{dt}\langle\hat{\mathbf{L}}\rangle = \langle\hat{\mathbf{N}}\rangle$ wobei $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{r} \times (-\nabla V(\mathbf{r}))$.
ii) Zeigen Sie $\frac{d}{dt}\langle\hat{\mathbf{L}}\rangle = 0$ für ein beliebiges kugelsymmetrisches Potential $V(\mathbf{r}) = V(r)$.