Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 13.06.2019

Blatt 10 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 20.06.2019, 14.00 Uhr)

Aufgabe 1 *Spin Dynamik* [$3 + 12 = 15$ Punkte]

Wir betrachten die Dynamik eines Spins im Magnetfeld. Der Hamiltonoperator ist durch $H = -\gamma \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ gegeben. $\mathbf{B}$ bezeichnet dabei wie üblich die magnetische Flussdichte.

a) Wir betrachten den Fall das $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ gilt und zeitunabhängig ist. Das System befinde sich zu Beginn im Zustand $\begin{pmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2)e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$ (bezüglich der Eigenbasis von S_z). Bestimmen Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ in der S_z-Basis und berechnen Sie den Erwartungswert des Spinvektors $\mathbf{S}$ zum Zeitpunkt t.

b) Wir betrachten nun den zeitabhängigen magnetischen Fluss $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x B\cos(\omega t) - \mathbf{e}_y B\sin(\omega t) + B_0\mathbf{e}_z$ ($B \ll B_0$). Der Anfangszustand sei der Eigenzustand von S_z mit Eigenwert $\hbar/2$.

   i) Wir führen den gedrehten Zustand $|\psi'(t)\rangle = e^{-i\omega t S_z/\hbar}|\psi(t)\rangle$ ein. Lösen Sie die Schrödinger-Gleichung für $|\psi'(t)\rangle$.

   ii) Berechnen Sie mithilfe von (i) den Erwartungswert des Spinvektors $\mathbf{S}$ zum Zeitpunkt t.

Aufgabe 2 *Drehimpulsaddition* [$6 + 10 + 4 = 20$ Punkte]

a) Wir betrachen ein System mit zwei Teilchen. Die Spins der Teilchen seien jeweils 1 und 1/2.

   i) Berechnen Sie die Matrixdarstellung des Gesamtdrehimpulses $S_{w,tot} = S_{w,1} + S_{w,2}$ ($w = x, y, z$) in der Basis
   $\{|1, 1/2\rangle, |1, -1/2\rangle, |-1, 1/2\rangle, |-1, -1/2\rangle, |0, 1/2\rangle, |0, -1/2\rangle\}$.

   ii) Bestimmen Sie die normierten Vektoren, welche gleichzeitig Eigenvektoren von S^2_{tot} und $S_{z,tot}$ sind. Wählen sie dabei die Form $\sum_{s_1,s_2=\pm1,0} c_{s_1,s_2}|s_1, s_2\rangle$.

b) Berechnen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Kopplung folgender Drehimpulse.

   i) $1, \frac{1}{2}$ ii) $1, 1$

c) Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin 1, welches sich in dem Potential

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r)\hat{L}\cdot\hat{S} + V_3(r)\left(\hat{L}\cdot\hat{S}\right)^2$$

bewegt. Berechnen Sie die Werte von $V(r)$ in den Zuständen:

i) $j = l + 1$
ii) $j = l$

Aufgabe 3 *Interaktion mit Elektromagnetischem Feld* [$1 + 4 = 5$ Punkte]

Wir betrachten die Schrödingergleichung mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + (e/c)\hat{A}(\mathbf{r},t)\right)^2}{2m}$$

Sie wissen aus der Elektrodynamik, dass die magnetische Flussdichte $B = \nabla \times A$. Betrachten Sie die Transformation $A \mapsto A' = A + \nabla f(\mathbf{r},t)$.

a) Bestimmen Sie den transformierten Hamiltonoperator H' nach der Eichtransformation.

b) Zeigen Sie, dass die Transformation $\psi \mapsto \psi' = e^{i\Lambda(\mathbf{r},t)}\psi$ die Eichinvarianz erhält und bestimmen Sie $\Lambda(\mathbf{r},t)$.