Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 27.06.2019

Blatt 11 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 04.07.2019, 14.00 Uhr)

Aufgabe 1 *Gestörter eindimensionaler harmonischer Oszillator* [4 + 3 = 7 Punkte]

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Störung $\hat{H}^1 = \lambda \hat{X}^4$.

a) Berechnen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung E_n^1.

b) Erklären Sie warum die Störungsrechnung scheitert für große n. Was ist der physikalische Grund dafür?

Aufgabe 2 *Entartete Störungsrechnung – Stark Effekt* [4 + 4 + 4 = 12 Punkte]

Sei ein Wasserstoffatom in einem homogenen elektrischen Feld entlang der z-Achse, *i.e.*

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{H}_1, \quad \hat{H}_0 = \frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{P}}^2 - \frac{q^2}{|R|}, \quad \hat{H}_1 = qEZ$$

gegeben. Für $n = 2$ sind die vier Eigenzustände des Wasserstoffatoms

$$\begin{aligned}
\langle r, \theta, \varphi | 2, 0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi} r_0^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) e^{-\frac{r}{r_0}} \\
\langle r, \theta, \varphi | 2, 1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r_0^{5/2}}\, r\, e^{-\frac{r}{r_0}} \cos\theta \\
\langle r, \theta, \varphi | 2, 1, \pm 1\rangle &= \mp \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, r_0^{5/2}}\, r\, e^{-\frac{r}{r_0}} \sin\theta\, e^{\pm i\varphi},
\end{aligned}$$

wobei diese normiert sind und $r_0 = \frac{2\hbar^2}{\mu q^2}$ gilt. Außerdem ist die Energie gegeben durch $E_2^{(0)} = -\frac{\mu q^4}{8\hbar^2}$. Wir entwickeln nun die nullte Ordnung $|\psi^{(0)}\rangle = \sum_{(\ell,m)=(0,0),(1,0),(1,\pm 1)} \alpha_{\ell m} |2, \ell, m\rangle$ der Störungsentwicklung $|\psi_2\rangle = |\psi_2^{(0)}\rangle + \epsilon |\psi_2^{(1)}\rangle + \cdots$, $E_2 = E_2^{(0)} + \epsilon E_2^{(1)} + \cdots$ in den bekannten Eigenzuständen.

a) Zeigen Sie, dass $\alpha = (\alpha_{00}, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{1\,-1})^{\mathrm{T}}$ die Eigenwertgleichung $W\alpha = E_2^{(1)}\alpha$ mit Matrix W erfüllen muss. W besteht dabei aus $\langle 2, \ell', m' | \hat{H}_1 | 2, \ell, m\rangle$, wobei $(\ell', m'), (\ell, m) \in \{(0,0), (1,0), (1,\pm 1)\}$.

b) Berechnen Sie die sechzehn Einträge von W. Hinweis: Fast alle Einträge sind null.

c) Lösen Sie $W\alpha = E_2^{(1)}\alpha$ und bestimmen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung.

Aufgabe 3 *Grundzustandsenergie des Heliumatoms – Variationsmethode* [$8 + 4 = 12$ Punkte]

Wir betrachten zwei Elektronen (indiziert durch 1, 2) in einem Heliumatom, dessen Hamiltonoperator durch

$$\hat{H}_Z = \frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{P}}_1^2 + \frac{1}{2\mu}\hat{\mathbf{P}}_2^2 - q^2\left(\frac{Z}{|\mathbf{r}_1|} + \frac{Z}{|\mathbf{r}_2|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\right).$$

gegeben ist. Z bezeichne hier die Anzahl an Protonen, *i.e.* $Z = 2$. Rechnen Sie jedoch mit allgemeinem Z.

a) Ohne den Wechselwirkungsterm $\frac{q^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$ ist der Grundzustand von $\hat{H}_Z$ durch das Produkt $\psi_{12}^{(Z)} = \psi_1^{(Z)}\psi_2^{(Z)}$ gegeben, wobei $\psi_k^{(Z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi(a/Z)^3}}e^{-Zr_k/a}$ und $a = \hbar^2/(\mu q^2)$ der Bohrradius ist. Beachten Sie, dass $\psi_{12}^{(Z)}$ kein Eigenzustand des Hamiltonoperators <u>mit</u> Wechselwirkungsterm ist.

   Berechnen Sie $\langle\psi_{12}^{(Z)}|\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}|\psi_{12}^{(Z)}\rangle$. Hinweis: Legen Sie die z-Achse in Richtung von $\mathbf{r}_1$.

   Bemerkungen:

   - Da die Elektronen Fermionen mit Spin 1/2 sind, gilt der Produktansatz.
   - Wir vernachlässigen die Spin-Spin-Wechselwirkung.

b) Wir wollen die Grundzustandsenergie mithilfe der Variationsmethode approximieren. Verwenden Sie als Testfunktion $\psi_{12}^{(Z)}$ und minimieren Sie $\langle\psi_{12}^{(Z)}|\hat{H}_Z|\psi_{12}^{(Z)}\rangle$, indem Sie Z variieren.

Aufgabe 4 *Zeeman-Effekt und Spin-Bahn-Kopplung* [$3 + 3 + 3 = 9$ Punkte]

Ein Elektron in einem p-Zustand des Wasserstoffatoms befinde sich in einem homogenen Magnetfeld in z-Richtung. Wir berücksichtigen den Hamilton-Operator des Systems, der den Spin-Bahn-Term $\hat{H}_{LS}$ und den Zeeman-Term $\hat{H}_B$ enthält:

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{2W}{\hbar^2}\hat{L}\cdot\hat{S}}_{\hat{H}_{LS}} + \underbrace{\frac{\mu_B}{\hbar}B\left(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z\right)}_{\hat{H}_B}$$

wobei W eine Konstante und μ_B das Bohrsche Magneton ist.

a) Im Grenzfall des schwachen Magnetfelds $\mu_B B \ll W$ kann der Zeeman-Term als Störung gegenüber dem Spin-Bahn-Term betrachtet werden. Berechnen Sie im Rahmen der Störungstheorie erster Ordnung die Energieeigenwerte.

b) Berechnen Sie störungstheoretisch die Energieeigenwerte in erster Ordnung in W für den Fall, dass das Magnetfeld stark gegenüber W ist, also $W \ll \mu_B B$.

c) Berechnen Sie die exakten Energieeigenwerte von $\hat{H}$.

   Bemerkung: Sie können die aus der Vorlesung bekannten Clebsch-Gordan-Koeffizienten direkt benutzen.