Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
L. Giannelli (Mail: luigi.giannelli@physik.uni-saarland.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 06.06.2019

Blatt 9 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 13.06.2019, 14:00 Uhr)

Aufgabe 1 *Pauli-Matrizen* [$4+3=7$ Punkte]

Die folgenden hermiteschen Matrizen werden Pauli Matrizen genannt:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie die Relationen:

   i) $\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = \delta_{jk} + i \sum_{\ell \in \{1,2,3\}} \epsilon_{jk\ell} \hat{\sigma}_\ell$ ii) $[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k] = 2i \sum_{\ell \in \{1,2,3\}} \epsilon_{jk\ell} \sigma_\ell$ iii) $\{\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k\} = 2\delta_{jk}$

   iv) $\mathrm{Tr}(\hat{\sigma}_i) = 0$ unter Verwendung der a)-i)

   für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

b) Wir betrachten die Vektoren $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \hat{B}_3 \end{pmatrix}$, wobei $\hat{A}_j$ und $\hat{B}_j$ ($j \in \{1, 2, 3\}$) Operatoren sind, die mit $\hat{\sigma}_i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) vertauschen. Das Skalarprodukt zwischen $\mathbf{A}$ und $\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix}$ sei definiert als $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} := \hat{\sigma}_1 \hat{A}_1 + \hat{\sigma}_2 \hat{A}_2 + \hat{\sigma}_3 \hat{A}_3$.

   Zeigen Sie

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Aufgabe 2 *Wasserstoffatom* [$4+3+2+3+2+4+4+2=24$ Punkte]

Wir betrachten die stationäre Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom.

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_\mathrm{e}} \Delta_\mathrm{e} - \frac{\hbar^2}{2m_\mathrm{p}} \Delta_\mathrm{p} - \frac{\mathrm{e}^2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_\mathrm{e} - \mathbf{r}_\mathrm{p}|} \right\} \psi(\mathbf{r}_\mathrm{e}, \mathbf{r}_\mathrm{p}) = E \psi(\mathbf{r}_\mathrm{e}, \mathbf{r}_\mathrm{p}) \tag{1}$$

a) Zunächst wollen wir das Zweikörpersystem in die Relativbewegung von Elektron und Proton, sowie die Bewegung des Schwerpunktes aufteilen. Führen Sie dafür die Schwerpunktskoordinaten $\mathbf{r}_{\mathrm{s}} = \alpha \mathbf{r}_{\mathrm{e}} + \beta \mathbf{r}_{\mathrm{p}}$ und Relativkoordinaten $\mathbf{r}_{\mathrm{rel}} = \mathbf{r}_{\mathrm{e}} - \mathbf{r}_{\mathrm{p}}$ ein. Bestimmen Sie α und β und entkoppeln Sie die Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms, indem Sie zwei separate Differentialgleichungen für die Relativ - und Schwerpunktsbewegung herleiten.

b) Führen Sie für die Differentialgleichung der Relativkoordinaten einen Seperationsansatz $\psi = R(r)Y_{\mathrm{l,m}}(\theta,\varphi) = \frac{1}{r}U(r)Y_{\mathrm{l,m}}(\theta,\varphi)$ durch und bestimmen Sie die Differentialgleichung die $U(r)$ erfüllen muss.

Hinweis: $Y_{\mathrm{l,m}}(\theta,\varphi)$ sind die Kugelflächenfunktionen.

c) Führen Sie den Variablenwechsel $U(r) = e^{-\rho} f(\rho)$, $\rho = r/r_0$ durch und bestimmen Sie die Differentialgleichung die f erfüllen muss.

Bemerkung: Die Lösung ist $f'' + af' + (b/\rho + c/\rho^2)f = 0$.

d) Machen Sie einen Potenzreihenansatz und bestimmen Sie die Rekursionsbeziehung der Koeffizienten.

e) Zeigen Sie, dass der n-te Energieeigenwert durch $E_n = \frac{1}{n^2}E_1$ bestimmt ist. Bestimmen Sie weiterhin E_1 und den Entartungsgrad aller Energieniveaus.

f) Bestimmen Sie den ersten und zweiten angeregten Zustand.

Hinweis: Die Normierung der Zustände ist nicht verlangt!

g) Zeigen Sie, dass der Radialteil für ein allgemeines n mittels der assoziierten Laguerre Polynome ausgedrückt werden kann. $\Big($i.e. $R(r) \propto e^{-\rho}\rho^{\ell} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(2\rho)$, mit $L_p^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{p+k}^0$, $L_p^0 = e^x \frac{d^p}{dx^p}(e^{-x}x^p)\Big)$

h) Ein Elektron, dass sich im Coulomb-Potenzial eines Protons bewegt, wird durch folgende Wellenfunktion beschrieben:

$$\psi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich im Grundzustand des Wasserstoffatoms befindet?

Aufgabe 3 *Spin* $\frac{1}{2}$ [3 + 3 + 3 = 9 Punkte]

Wir betrachten ein Teilchen mit Spin 1/2. Seien $|1/2\rangle$ und $|-1/2\rangle$ die Eigenzustände zu $\hat{S}_z$. Die Spin-Matrizen in der Eigenbasis von $\hat{S}_z$ sind:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\langle \hat{S}_z \rangle$,$\langle \hat{S}_x \rangle$ und $\langle \hat{S}_y \rangle$.

b) Sei $\mathbf{n}$ der radiale Einheitsvektor in Kugelkoordinanten, *i.e.* $\mathbf{n} = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z$. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren $|\mathbf{n}\pm\rangle$ von $\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}$. Dabei ist $\mathbf{S} = \mathbf{e}_x\hat{S}_x + \mathbf{e}_y\hat{S}_y + \mathbf{e}_z\hat{S}_z$. Verwenden Sie die S_z-Basis, i.e. $|1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|-1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ um ihre Antwort anzugeben.

c) Berechnen Sie $\langle \mathbf{n}\pm|\mathbf{S}|\mathbf{n}\pm\rangle$