Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Prof. Dr. L. Santen
G. Monzon (Mail: g.monzon@lusi.uni-sb.de)
N. Safaridehkohneh
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de/

Saarbrücken, den 04.07.2019

Blatt 12 zur Theoretischen Physik III, SS2019

(Abgabe bis 11.07.2019, 14.00 Uhr)

Aufgabe 1 *Zeitabhängige Störungsrechnung und Zwei-Zustandssystem* [$6 + 17 = 23$ Punkte]

a) Seien $E_n^{(0)}$ die Energien und $\left|\psi_n^{(0)}\right\rangle$ die nicht entarteten Eigenzustände der stationären Schrödinger-Gleichung mit Hamiltonoperator $\hat{H}_0$. Wir betrachten die zeitabhängige Störung $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$ und wollen die Koeffizienten c_n in der Entwicklung

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) \exp(-iE_n^{(0)} t/\hbar) \left|\psi_n^{(0)}\right\rangle$$

bestimmen.

i) Bestimmen Sie die Differentialgleichung, welche die c_n's erfüllen müssen.

ii) Wir nehmen als Anfangszustand $|\psi(0)\rangle = \left|\psi_{n_0}^{(0)}\right\rangle$. Lösen Sie die Differentialgleichung in erster Ordnung Störungstheorie.

b) Als Beispiel betrachten wir ein Zwei-Zustandssystem mit

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \qquad \text{wobei} \qquad E_2 > E_1.$$

Außerdem haben wir ein externes periodisches Potential der Form

$$\hat{V}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \mathbf{e}^{i\omega t} \\ \gamma \mathbf{e}^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Anregungsfrequenz ω und der Kopplung γ, welche eine reelle, positive Konstante ist.

i) Stellen Sie Differentialgleichungen für $c_1(t)$ und $c_2(t)$ unter Verwendung von $\omega_0 \equiv \omega_{21} = \frac{(E_2 - E_1)}{\hbar}$ auf.

ii) Bestimmen Sie eine entkoppelte Differentialgleichung für $c_2(t)$.

iii) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im Zustand 1. Berechnen Sie $c_2(t)$ und $c_1(t)$ und geben Sie ihr Ergebnis in Abhängigkeit der Rabi-Frequenz $\Omega = \sqrt{\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}}$ an.

iv) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Übergang $1 \to 2$ und überprüfen Sie die Normierung $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$.

v) Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit für den Übergang $1 \to 2$ störungstheoretisch bis zur ersten nicht-verschwindenden Ordnung.

Stimmt ihr Ergbenis mit dem Ergebnis aus iv) überein? Diskutieren Sie den Fall, dass sich ω_0 stark von ω unterscheidet und den Resonanz-Fall, indem $\omega_0 \approx \omega$ gilt.

Aufgabe 2 *Wasserstoffatom im zeitabhängigen elektrischen Feld* [5 + 2 = 7 Punkte]

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem zeitlich veränderlichen homogenen elektrischen Feld der Form

$$\mathbf{E}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E_0 e^{-\gamma t} \hat{e}_z & t > 0 \end{cases}$$

a) Zum Zeitpunkt $t < 0$ befinde sich das Wasserstoffatom im Grundzustand. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Wasserstoffatom zur Zeit $t \to \infty$ im $2p$-Zustand befindet.

b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wasserstoffatom in den Zustand $2s$ übergeht?

Aufgabe 3 *Angeregter harmonischer Oszillator* [6 + 3 + 1 = 10 Punkte]

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der klassischen Frequenz ω_0. Für $t < 0$ befinde sich der Oszillator im Grundzustand. Für $t > 0$ haben wir die Störung:

$$V(t) = F_0 x \cos \omega t$$

wobei F_0 eine Konstante ist.

a) Verwenden Sie die zeitabhängige Störungsrechnung bis zur ersten nicht-verschwindenden Ordnung um die Zeitabhängigkeit des Erwartungswertes $\langle x \rangle$ zu berechnen.

b) Lösen sie die analoge klassische Bewegungsgleichung und überprüfen Sie, dass sich $\langle x \rangle$ wie $x(t)$ verhält.

c) Was können Sie über den Fall $\omega_0 \approx \omega$ aussagen?