Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung – Physik
Prof. Dr. L. Santen (Email: santen@lusi.uni-sb.de)
Dr. R. Shaebani (Email: shaebani@lusi.uni-sb.de)
Dr. C. Chevalier (Email: carole@lusi.uni-sb.de)
Web: http://santen.physik.uni-saarland.de

Saarbrücken, den 20.04.2023

Blatt 2 zur Theoretischen Physik Ib, Sommersemester ’23

(Abgabe bis 27.04.2023, 12:00 Uhr)

Übung 1: Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten

Finden Sie eine geeignete mathematische Darstellung (in Form einer Gleichung) der Zwangsbedingungen für die angegebenen Systeme und einen passenden Satz generalisierter Koordinaten. Geben Sie die Art der Zwangsbedingungen an (holonom oder anholonom sowie skleronom oder rheonom) und tragen Sie die generalisierten Koordinaten in eine Skizze ein.

Hinweis: Bedenken Sie, dass die Zahl der generalisierten Koordinaten mit der Zahl der Freiheitsgrade übereinstimmen muss. Vergessen Sie nicht, den Definitionsbereich der neuen Koordinaten anzugeben.

(a) Schienenpendel in 2D: Zwei Massen sind durch eine feste Stange der Länge a verbunden. Eine der Massen ist an einer entlang der Horizontalen gerichteten Schiene befestigt. Die Aufhängung der Stange ist so gewählt, dass keine Bewegung der zweiten Masse in der Richtung senkrecht zu der von der Horzontalen und der Vertikalen aufgespannten Ebene möglich ist. Anderweitig wird die zweite Masse aber nicht von der Schiene behindert.

(b) Eine Kugel mit homogener Dichte und Radius r_0 im Schwerefeld der Erde, welche mit einem Seil der Länge l an einem festen Aufhängepunkt befestigt ist, sich ansonsten aber frei bewegen kann.

(c) Drei gleiche Massen befestigt an den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (Seitenlänge a), dessen Mittelpunkt in alle Richtungen frei drehbar gelagert ist.

(d) Ein Massepunkt, welcher auf einer harmonisch oszillierenden Wippe (Länge l, Aufhängung mittig, momentane Auslenkung $\alpha(t) = \cos(\omega t)$) gleitet.

[3+3+4+4=14 Punkte]

Übung 2: Variationsrechnung

Finden Sie jeweils die Funktion y, welche die Stationärititätsbedingung für folgende Funktionale und Randbedingungen erfüllt, indem Sie mittels Euler-Lagrange eine Differentialgleichung aufstellen und diese lösen:

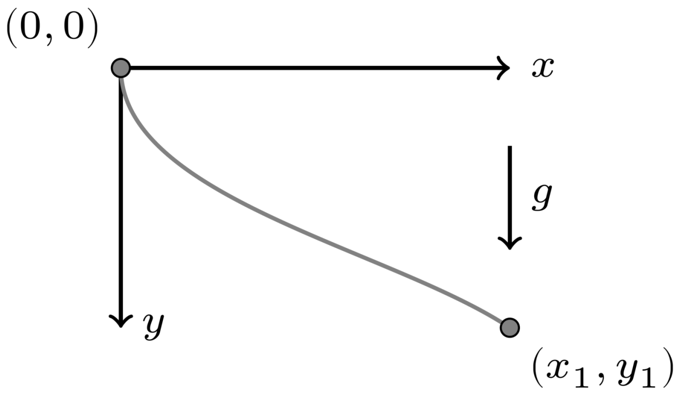
(a) $F[y] = \int (1 - ay + b\dot{y}^2)\,\mathrm{d}t \quad \wedge \quad y(0) = y(T) = 0$

(b) $F[y] = \int \frac{\dot{y}^2}{2} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}t \quad \wedge \quad y(-2) = y(2) = 0$

[4+6=10 Punkte]

Übung 3: Brachistochronenproblem

Ein Teilchen mit Masse m bewege sich auf einer Schiene unter dem Einfluss der Gravitation reibungsfrei von Punkt $(0, 0)$ nach (x_1, y_1).



Die Anfangsgeschwindigkeit sei Null.

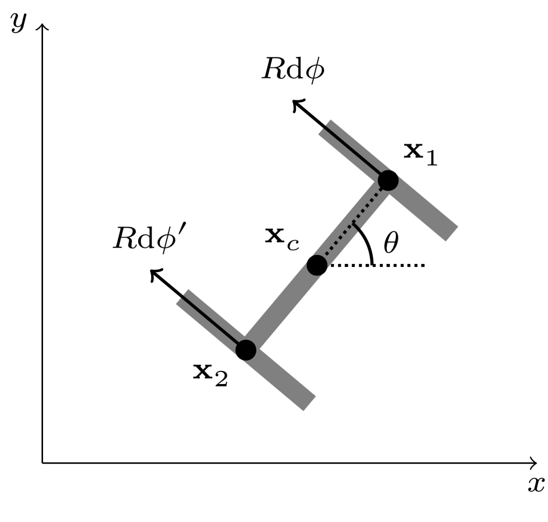
(a) Nutzen Sie die Definition der Momentangeschwindigkeit $||\mathbf{v}|| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ um die Gesamtlaufzeit des Teilchens T als Integral über den Weg s auszudrücken.

(b) Schreiben Sie die Zeit $T[y(x)]$ als Funktional über die Form der Schiene $y(x)$, indem Sie mithilfe der Energieerhaltung die Geschwindigkeit durch die Höhe y ausdrücken.

[2+3=5 Punkte]

Übung 4: Räder auf einer Achse

Zwei Räder (1 und 2) mit dem Radius R sind an den Enden einer gemeinsamen Achse mit der Länge L so montiert, dass sie sich unabhängig voneinander drehen können. Die gesamte Konstruktion rollt ohne Schlupf auf einer Ebene. Ein kartesisches Koordinatensystem (x, y) in der Ebene angenommen, bezeichnet θ den Winkel zwischen der Achse der Konstruktion und der x-Achse. Außerdem bezeichnet ϕ die Rotation des Rades 1 und ϕ' die Rotation des Rades 2. Der Winkel ϕ (ϕ') wird so gemessen, dass sich bei steigendem ϕ (ϕ') das Rad 1 (2) "vorwärts" und bei fallendem ϕ (ϕ') "rückwärts" bewegt. Dem Mittelpunkt der Achse seien die Koordinaten $\mathbf{x}_c = (x_c, y_c)^\top$ gegeben.



(a) Zeigen Sie, dass das System zwei nicht holonomen Zwangsbedingungen unterliegt:

$$\cos\theta\,\mathrm{d}x_c + \sin\theta\,\mathrm{d}y_c = 0$$
$$-\sin\theta\,\mathrm{d}x_c + \cos\theta\,\mathrm{d}y_c = \frac{1}{2}R\left(\mathrm{d}\phi + \mathrm{d}\phi'\right)$$

(b) Zeigen Sie, dass eine holonome Zwangsbedingung der Form

$$\theta = C + \frac{R}{L} \left(\phi - \phi' \right) \tag{1}$$

mit der Konstanten C existiert.

Hinweis: Stellen Sie zunächst Ausdrücke für die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}_{1,2}$ der Mittelpunkte der Räder 1 und 2 auf. Hilfreich sind auch die Vektoren $\mathbf{e}_r := \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{e}_\theta := \left(\begin{smallmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$.

[6+5=11 Punkte]